Estudios del Bachillerato

Matemáticas (5.° curso)

Libro II

Geometría del Espacio

por

José Oñate Guillén

Catedrático de Matemáticas
en el Instituto «Ramiro de Maeztu»

Segunda edición

Este libro ha sido aprobado como obra de texto por el Ministerio de Educación Nacional

Madrid, 1939

Año de la Victoria

Geometría del Espacio

por

José Oñate Guillén

Catedrático de Matemáticas en el Instituto «Ramiro de Maeztu»

Segunda edición

Texto aprobado por el Ministerio de Educación Nacional

VITORIA
Imp., Lib. y Enc. del Montepío Diocesano
San Antonio, 10
1939

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

TEMA 1.º

Preliminares

1. Determinación del plano.

Determinación por tres puntos no alineados.

Recordarás que en la Geometría plana se establece que *tres puntos no alineados determinan un plano,* es decir, que por tres puntos que no estén en línea recta pasa un plano y solo uno.

Recta con dos puntos en un plano.

De esto y de la definición de plano puede deducirse que *si una recta tiene dos puntos en un plano está toda ella contenida en él.*

Determinación por una recta y un punto exterior.

Dibuja una recta *r* y un punto exterior C. Toma en la recta dos puntos A y B. Por los tres puntos A, B y C pasa un plano y solo uno, y como la recta *r* tiene dos puntos en ese plano, estará toda comprendida en él, por lo cual, *esa recta* r *y ese punto exterior C determinan un plano.*

Determinación por dos rectas que se cortan.

Dibuja dos rectas *m* y *n* que se corten en un punto A. Toma en la recta *m* un punto B y en la recta *n* un punto C. Por esos tres puntos A, B y C pasa un plano y solo uno, y en ese plano estarán contenidas las dos rectas.

Por tanto, *dos rectas que se cortan determinan un plano.*

Determinación por dos rectas paralelas.

Traza dos rectas paralelas *m* y *n*. Toma dos puntos A y B en la recta *m* y un punto C en la recta *n*. Por las rectas *m* y *n* pasa desde luego un plano, puesto que son paralelas, pero no pasa más que uno, pues por los puntos A, B y C solo pasa un plano.

Por tanto, *dos rectas paralelas determinan un plano.*

En resumen:

Un plano queda determinado por tres puntos no alineados; una recta y un punto exterior; dos rectas que se cortan, o dos rectas paralelas.

2. Clasificación de los puntos por un plano.

Traza un plano α (figura 1.ª). Toma dos puntos A y B exteriores al plano α, de tal manera que el segmento que los une no corte al plano. Esos dos puntos se dice que están *en la misma región* respecto del plano α.

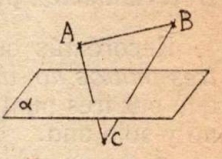


Fig. 1.ª

Toma otro punto C, también exterior a α, pero de tal manera que el segmento AC corte el plano α. Se dice entonces que los puntos A y C están en distinta región respecto del plano α. La intuición nos dice que si unimos B con C, el segmento de unión corta también al plano α, pero no lo podemos demostrar y lo admitimos como *axioma.*

En resumen:

Todo plano divide a los puntos del espacio en dos regiones, de tal manera que el segmento que une dos puntos de una región no corta al plano, y el segmento que une dos puntos de distinta región corta a ese plano.

3. Intersección de dos planos.

Traza un plano α (figura 2.ª). Toma un punto A en dicho plano α. Traza otro plano β, que también pase por el punto A. Parece que los planos α y β tienen comunes todos los puntos de una recta que pase por A. En efecto, los puntos comunes a los dos planos tienen que estar en

línea recta, porque si no, tendríamos dos planos α y β que pasaban por tres puntos no alineados.

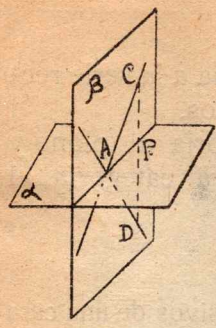


Fig. 2.ª

Por otra parte se puede demostrar, fundándose en el axioma sobre clasificación de los puntos por un plano, que existe efectivamente una recta A P que pasa por A y que pertenece a los dos planos α y β; recta que se llama *intersección de los dos planos*. La demostración está indicada en la figura 2.ª, pero no la detallamos por razones de brevedad.

En resumen:

La intersección de dos planos es una línea recta, es decir, que si dos planos distintos tienen un punto común, tienen comunes todos los puntos de una recta y solo esos. A la recta se la llama intersección de los dos planos.

4. Formas Geométricas.

Dibuja una recta *r*. El conjunto de todos los puntos pertenecientes a esa recta *r* se llama *serie rectilínea*.

Dibuja varias rectas que pasen por un punto A y que estén en un plano. El conjunto de las infinitas rectas que así se pueden trazar se llama *haz de rectas de vértice* **A**.

Suponte asímismo el conjunto de todos los planos que pasan por una recta *r*. Forman una figura que se llama *haz de planos de arista* **r**.

La serie rectilínea, el haz de rectas y el haz de planos se llaman *formas de primera categoría*.

El conjunto de todas las rectas y todos los puntos que estén en un plano es una *forma de segunda categoría,* y también lo es *la radiación*, que es el conjunto de todas las rectas y todos los planos que pasan por un punto, llamado *vértice* de la radiación.

Se llama *forma de tercera categoría* al *espacio*, considerado como conjunto de todos los puntos, rectas y planos que existen.

Figura de primera categoría es un conjunto de elementos pertenecientes a una forma de primera categoría, por ejemplo, un segmento, rectilíneo o ángulo plano.

Lo mismo se definen las *figuras de segunda y tercera categoría.*

En resumen:

Se llaman formas de primera categoría a la serie rectilínea, el haz de rectas y el haz de planos.

Se llaman formas de segunda categoría al plano y la radiación y se llama forma de tercera categoría al espacio.

Ejercicios

1.° Dibujar un cubo. Los vértices sucesivos de una cara llámanse A, B, C y D. Los vértices de la cara opuesta llámanse A', B', C' y D' de manera que AA', sea una arista, BB', otra, CC', otra, y DD', otra; nómbrense los planos diagonales determinados por cada tres de sus ocho vértices.

2.° Suponiendo que la arista del cubo mide 3 cm., calcúlese la diagonal AC' del cuerpo, aplicando el teorema de Pitágoras.

3.° Dibújese gráficamente esa diagonal del cuerpo, por construcción de dos triángulos rectángulos sucesivos.

4.° Pónganse ejemplos de figuras de segunda categoría y tercera categoría.

TEMA 2.°

Posiciones relativas de rectas y planos

1. Posiciones relativas de dos rectas en el espacio.

Dibuja dos rectas *a* y *b* (figura 1.ª) que supondremos representan dos rectas del espacio. Toma un punto M en la recta *b*. Este punto y la recta *a* determinan un plano, M a. Si la recta *b* está también en este plano, será secante de la recta *a* o será paralela a dicha recta. Pero si la recta *b* pasa por algún otro punto extetior al plano Ma, no puede ser ni secante ni paralela a la recta *a* y se dice que se cruza con ella.

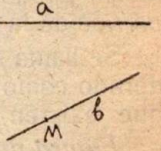


Fig. 1.ª

En resumen:

Dos rectas distintas pueden ocupar tres posiciones relativas: o tienen un solo punto común y se dicen que son secantes; o no tienen punto común, pero están en un plano, y se dice que son paralelas; o no están situadas en un mismo plano, y se dice que se cruzan o que son rectas cruzadas.

2. Posiciones relativas de una recta y un plano.

Dibuja un plano α, (figura 2.ª). Dibuja una recta *m* que tenga dos puntos en este plano α, y que por consiguiente esté toda situada en él. Por un punto exterior al α, traza una recta *r* que sea paralela a la recta *m*. Esta recta *r* no puede encontrar al plano α.

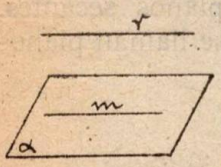


Fig. 2.ª

En efecto todos los puntos de *r* están en el plano *rm*, y este plano solo tiene comunes con α los puntos de *m*, que ninguno está en *r*.

Esa recta *r* se dice que es *paralela al plano* α o que el plano α es *paralelo a la recta* r. En fin, si una recta pasara por un punto de α y por otro punto exterior al plano α, no podría tener con el plano α más que un punto común y sería secante a ese plano.

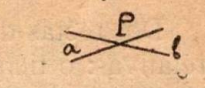
En resumen:

Una recta y un plano no pueden ocupar más que tres posiciones relativas: o la recta tiene dos puntos en el plano y estará toda ella contenida en él; o tiene un solo punto en el plano y entonces es secante al plano; o no tiene ningún punto común con el plano y entonces es paralela al plano.

3. Posiciones relativas de dos planos.

Traza un plano α (figura 3.ª). Traza dos rectas *m* y *n* que se corten, y que esten en el plano α. Por un punto P exte-

rior al plano α traza dos rectas a y b que sean respectivamente paralelas a las rectas m y n. El plano $a\,b$ no puede tener ningún punto común con el plano α.



Pues si tuviera alguno, le cortaría según una recta, y esa recta tendría que cortar en un mismo punto a una de las dos rectas m o n y a su paralela a o b, lo cual no puede ser.

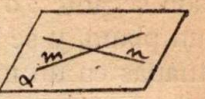


Fig. 3.ª

Por eso se dice que el plano α y el plano ab son *planos paralelos*.

En resumen:

Dos planos distintos solo pueden ocupar dos posiciones relativas: o tienen algún punto común, y por consiguiente una recta común, llamándose planos secantes, o no tienen ningún punto común y se llaman planos paralelos.

4. Plano que corta a dos planos paralelos.

Dibuja dos planos paralelos α y β. Si un tercer plano los corta en dos rectas m y b, estas rectas de intersección tienen que ser paralelas.

En efecto, están en un mismo plano, que es el plano secante, y no tienen punto común, porque no lo tienen los planos α y β.

En resumen:

Si un plano corta a dos planos paralelos, las intersecciones son paralelas.

5. La proposición de Euclides generalizada a los planos.

En la geometría plana establecíamos que por todo punto exterior a una recta pasa una sola recta paralela a la primera. Esta proposición la admitíamos como axiomática, y la llamábamos *Postulado de Euclides*. En el espacio se puede demostrar que por todo punto P exterior a un plano α solo pasa un plano paralelo al α (fig. 4.ª).

En efecto: dibuja un plano α y toma un punto exterior a él, P. Dibuja por P un plano β paralelo al α. Dibuja otro plano γ que también pase por P, y vamos a probar que este plano γ no puede ser paralelo al plano α. Pues el plano γ cortará al β según una recta *a*, que pasa por P. Toma en β otra recta *b*, que también pase por P, y toma en α un punto Q. El plano bQ cortara al α en una recta *m*, paralela a la *b*, y cortará a γ en una recta *c*, que por cortar en P a la recta *b*, tiene que cortar también a su paralela *m*. El punto de encuentro pertenecerá a los planos α y γ.

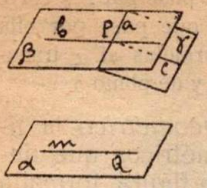


Fig. 4.ª

En resumen:

Por todo punto exterior a un plano, solo pasa otro plano paralelo al primero.

6. Planos paralelos a un tercero.

En la geometría plana estudiaste que *si dos rectas son paralelas a una tercera, son también paralelas entre sí,* proposición que se verifica también en el espacio. Pero además, la misma proposición se verifica con los planos, o sea, que si dos planos α y β son paralelos a un tercero, serán paralelos entre sí.

Pues si tuvieran algún punto común, por ese punto se podrían trazar dos planos paralelos a dicho tercero, lo cual no puede ser.

En resumen:

Dos planos paralelos a un tercero son paralelos entre si.

7. Lugar geométrico de las paralelas a un plano, por un punto exterior.

Dibuja un plano α y un punto P, exterior a él (fig. 5.ª). Traza por P varias rectas paralelas al plano α, y traza por el mismo P el plano β, paralelo al α. Parece que todas las rectas que pasan por P y son paralelas al α forman un *haz de rectas* situado en el plano β.

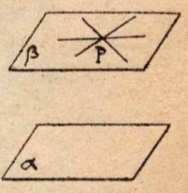


Fig. 5.ª

Y en efecto, todas las rectas que pasen por

P y estén en β serán paralelas al α, porque no pueden tener con α ningún punto común. Y en cambio, toda recta que pase por P y corte al β, tendrá que cortar al α, pues cualquier plano que pase por ella corta al β y por tanto al α. Esto nos dice que las paralelas al α, trazadas por P, forman un haz de rectas de vértice P, y de plano β.

Pero ya recordarás que se llama *lugar geométrico* la figura formada por *todos* los elementos geométricos que tienen una cierta propiedad. En este caso la figura formada por todas las rectas que pasan por P y son paralelas al α forman dicho haz de rectas, y por tanto, este haz será el lugar geométrico de tales rectas.

En resumen:

El lugar geométrico de las paralelas a un plano por un punto exterior es un haz de rectas que tiene por vértice ese punto y cuyo plano es paralelo al dado.

Ejercicios

1.—Dibuja un cuerpo cuya superficie esté formada por 6 rectángulos, es decir un *rectoedro,* u ortoedro. Llama A, B, C, D los vértices sucesivos de una de sus caras, y A', B', C', D' los vértices de la cara opuesta, de tal modo que A y A' estén en una arista, lo mismo que B y B', C y C', D y D'; nombra las aristas que son paralelas entre sí, las caras que son paralelas entre sí, y las aristas que son paralelas a otras caras.

2.—Suponiendo que en ese rectoedro anterior se tiene AB = 2cm, AD = 3 cm., AA' = 4 cm., calcular la longitud de la diagonal AC', aplicando el teorema de Pitágoras.

3.—Construir gráficamente la misma diagonal AC' con la construcción de dos triángulos rectángulos sucesivos.

4.—Dígase la posición que ocupan las diagonales de la cara AB CD respecto del plano A' B' C'.

TEMA 3.º

Rectas y planos perpendiculares

1. Ángulo de dos ejes cualesquiera

Traza dos rectas MP y NQ (figura 1.ª) que supondremos representan dos rectas del espacio. Elijamos en la primera el sentido MP y en la segunda el sentido MQ. Indícalo con flechas, como en la figura. Esas rectas, en las cuales se ha elegido un sentido, se llaman *ejes*. Por un punto A traza otros dos ejes AB y AC que sean respectivamente paralelos y del mismo sentido que los dos anteriores. Entonces el ángulo formado por las semirectas AB y AC se llama ángulo de aquellos dos ejes. Cualquiera que sea el punto A, el ángulo resulta siempre el mismo, como se deduce del teorema que estudiaremos a continuación.

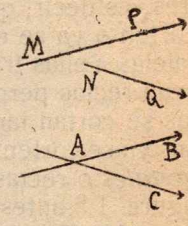


Fig. 1.ª

En resumen:

Se llama ángulo de dos ejes el ángulo formado por otros dos ejes que tienen la misma dirección y el mismo sentido que aquellos y que parten de un mismo punto del espacio.

2. Ángulos de lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

Traza un ángulo BAC (figura 2.ª). Traza otro ángulo B'A'C' que tenga sus lados respectivos paralelos y dirigidos en el mismo sentido que los del ángulo BAC. Parece que esos dos ángulos son iguales.

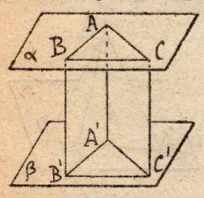


Fig. 2.ª

Esto se puede razonar intuitivamente suponiendo que se llevan a coincidir por una traslación que lleva el punto A a coincidir con el A', y también se puede demostrar rigurosamente como se indica en la figura, aunque no detallamos la demostración en obsequio a la brevedad.

En resumen:

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido son iguales.

3. Rectas perpendiculares y rectas ortogonales.

Ya sabes que cuando dos rectas se cortan, forman cuatro ángulos, y si uno de ellos es recto, serán rectos los otros tres, es decir, que son *perpendiculares*. En general, ya se corten o ya se crucen dos rectas, puede suceder que las paralelas a ellas trazadas por un punto arbitrario del espacio sean rectas perpendiculares, y entonces, si las primeras rectas se cortan también, serán perpendiculares, y en todo caso, ya se corten o ya se crucen, se dice que son rectas, *ortogonales* o rectas *normales*. Así por ejemplo, si en la misma figura 1.ª antes considerada resultase que el ángulo BAC era recto, las dos rectas MP y NQ serían rectas ortogonales, y en ese caso no es necesario considerar el sentido de esas rectas, puesto que si uno de los ángulos de vértice A es recto, los otros tres también lo serán.

En resumen:

Se llaman rectas perpendiculares las que se cortan formando ángulos rectos, y se llaman rectas ortogonales o rectas normales, aquellas rectas que se cortan o que se cruzan, pero que forman ángulos rectos.

4. Lugar geométrico de las rectas perpendiculares a otra por un punto de ella.

Traza una recta vertical (figura 3.ª). Toma un punto O en ella. Traza por O dos rectas OB y OD que sean perpendiculares a la recta vertical, pero que determinen con ella dos planos distintos. Las dos rectas OB y OD determinan un plano α; trázalo. Traza otra recta OC que esté situada en el plano α. Se puede demostrar que esta recta es también perpendicular a la recta vertical.

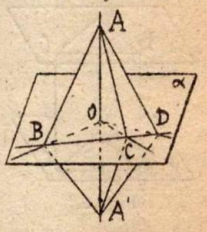


Fig. 3.ª

Para demostrarlo traza una recta BCD que corte a las tres rectas OB, OC y OD. Toma dos segmentos iguales OA y OA'. Une A y A' con B, C y D. Se te forman así varios triángulos en la parte superior α, que son respectivamente iguales a los triángulos análogos de la parte inferior; y de la igualdad de esos triángulos se deduce que los ángulos AOC y A'OC son iguales, y por consiguiente son rectos. La igualdad de los triángulos AOB y A'OB, y la de los triángulos AOD y A'OD, es consecuencia de ser rectos sus ángulos de vértice O. De esto se deduce la igualdad de los segmentos AB y A'B y la de los segmentos AD y A'D. Entonces los triángulos ABD y A'BD tendrán sus tres lados respectivamente iguales, y serán iguales, y de ello se deduce la igualdad de sus ángulos de vértice B. Entonces los triángulos ABC y A'BC tendrán iguales los ángulos en B y los lados que los forman, y serán triángulos iguales, por lo cual los terceros lados AC y A'C, también serán iguales. En fin, los triángnlos AOC y A'OC tendrán respectivamente iguales sus tres lados, y serán también iguales. De esto se deduce la igualdad de sus ángulos en O y la perpendicularidad de las rectas OC y AA'. Vemos por tanto que todas las rectas que pasan por O y están en α son perpendiculares a la recta AA'.

Al *contrario,* cualquier recta que pase por O, pero no esté en α, no podrá ser perpendicular a la recta AA'.

Puesto que el plano que con ella determina cortará al plano α en una perpendicular a dicha recta AA' y en ese plano no podrá haber más que una perpendicular a la recta AA' por el punto O.

Resulta pues que las perpendiculares a la recta AA' por un punto O de ella, forman un haz de rectas cuyo plano es el plano α, plano que se dice que es perpendicular a la recta AA', o que la recta AA' es perpendicular al plano.

En resumen:

El lugar geométrico de las perpendiculares a una recta trazadas por un punto de ella es un haz de rectas, cuyo plano se dice que es perpendicular a la recta.

5. Lugar geométrico de las rectas ortogonales a otra, trazadas por un punto.

Traza una recta AA' (figura 4.ª); toma un punto O exterior a ella. En el plano OAA' traza la recta OB perpendicular a la AA', y traza por B el plano α perpendicular a la recta AA,' plano que estará determinado por dos perpendiculares

cualesquiera trazadas por B a dicha recta AA'. Traza dos rectas OC y OD que estén en el plano α. Traza por B sus paralelas BC' y BD', que también estarán en el plano α. Como estas últimas rectas son perpendiculares a la recta AA', se deduce que las OC y OD serán ortogonales a la misma recta AA'. Por tanto, todas las rectas del haz de vértice O y plano α son ortogonales a la recta AA'. *Al contrario,* toda recta que pase por O y no esté en α no puede ser ortogonal a la recta AA', porque su paralela por B no estará en α y no será perpendicular a la recta AA'.

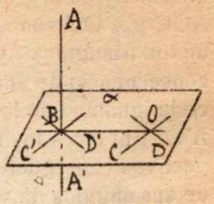


Fig. 4.ª

En resumen:

El lugar geométrico de las rectas ortogonales a otra trazadas por un punto, es un haz de rectas, cuyo plano pasa por ese punto, y es perpendicular a la primera recta.

6. Recta y plano perpendiculares.

Los teoremas anteriores demuestran que si una recta que corta a un plano es perpendicular a otras dos rectas que pasen por su pié en ese plano, o más en general, es ortogonal a dos rectas que se corten de ese plano, será perpendicular a todas las que pasen por su pie en ese plano, y será ortogonal a todas las rectas de este mismo plano, diciéndose entonces que la recta y el plano *son perpendiculares*.

En resumen:

Se dice que una recta y un plano son perpendiculares cuando la recta es ortogonal a todas las rectas de ese plano, y para esto es suficiente que sea perpendicular o que sea ortogonal a dos rectas que se corten, en ese plano.

7. Recta perpendicular a un plano por un punto.

Caso de que el punto esté en el plano.—Traza un plano α (figura 5.ª), toma un punto A situado en él. Vamos a ver

que por este punto A se puede trazar una recta *p*, y solo una, que sea perpendicular al plano α.

Para ello traza en el plano α una recta *r*, que pase por A. Traza luego un plano β, perpendicular a *r*, por el punto A, y traza por A en el plano B, una recta *p*, perpendicular a la intersección de los planos α y ϑ. La recta *p*, será perpendicular al plano α, porque es perpendicular a dicha intersección de α y ϑ, y también a la recta *r*, ya que la recta *r*, es perpendicular a todas las que pasan por su pie en ϑ, y en particular a la recta *p*. Por otra parte, cualquier recta *p'* de las que pasan por A, distinta de la *p*, no puede ser perpendicular al α, porque el plano pp' cortará al plano α en una recta, que siendo perpendicular a *p*, no lo podrá ser a *p'*.

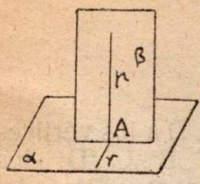


Fig. 5.ª

Caso de un punto exterior.—Traza un plano α, (figura 6.ª). Toma un punto A exterior a él, y vamos a probar que existe una recta *p* y una sola, que pasa por A y es perpendicular al plano α.

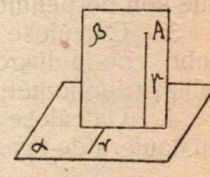


Fig. 6.ª

En efecto, traza una recta *r* que esté en α. Traza por A un plano ϑ, perpendicular a *r*, (como se ha hecho en la figura 4.ª). Traza una recta *p*, que pase por A, y sea perpendicular a la intersección de α y ϑ. Esta recta *p* será perpendicular al α, porque es ortogonal a dicha intersección y también a la recta *r*, ya que esta *r* es ortogonal a todas las rectas de β, y en particular a la *p*. Por otra parte, cualquiera otra recta *p'*, que pase por A, no puede ser perpendicular al plano α, porque el plano pp' cortará al α en una recta, que por ser perpendicular a *p* no puede serlo a *p'*.

En resumen:

Por todo punto de un plano o exterior a él, puede trazarse una recta perpendicular a ese plano y solo una.

8. Rectas perpendiculares a un mismo plano.

Traza un plano α, (figura 7.ª). Traza dos rectas *m* y *n* perpendiculares al plano α. Parece que estas dos rectas son *paralelas*.

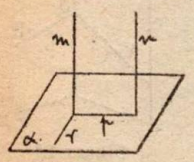


Fig. 7.ª

Y en efecto: traza la recta *p* que une sus pies. Traza la recta *r*, que esté en α y sea perpendicular a *p* por el pié de *m*. Esta *r* será perpendicular al plano mp. En este plano mp estará también la recta *n*, porque es ortogonal a la *r*, y como las

dos rectas *m* y *n* están en un mismo plano mp, y son perpendiculares a una recta p de ese plano, serán paralelas.

En resumen:

Si dos rectas son perpendiculares a un mismo plano, son paralelas.

Ejercicios

1. Díbújese un cubo; llámense A, B, C, D a los vértices sucesivos de una de sus caras, y llámense A', B', C', D' a los vértices de la cara opuesta de manera que sean aristas del cubo las rectas AA', BB', CC', DD'. Indíquense todas las aristas que son perpendiculares entre sí y todas las que son ortogonales.
2. En el mismo cubo indíquense las aristas y las caras que son perpendiculares entre sí.
3. Calcúlese el ángulo que forma la diagonal AC' del cubo, con la diagonal AC de una cara, haciendo uso de las tablas trigonométricas.
4. Calcúlese el ángulo que forma la diagonal AC' con cualquiera de las aristas que parta de A.

TEMA 4.º

Angulos diedros

1. El concepto de ángulo diedro.

Diedros convexos y cóncavos. Dibuja una recta *m* y dos semiplanos α y β, que parten de esa recta y no estén en un mismo plano (figura 1.ª).

Todos los semiplanos que parten de *m* forman un *haz de semiplanos*, y los α β pertenecientes a ese haz, lo dividen en dos partes desiguales, que se llaman *ángulos diedros*.

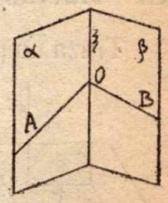


Figura 1.ª

Para comprenderlo, suponte un plano que corta a la arista *m* en un punto O. Ese plano cortará a los α y β en dos semirectas OA y OB. El haz de semirectas que parten de O, y están situadas en el plano secante, es dividido por las semirectas OA y OB, en dos partes, que

se llaman *ángulo convexo* y *ángulo cóncavo*, siendo el convexo el menor de los dos. Entonces, los semiplanos que parten de *m* y pasan por alguna de las infinitas semirectas del ángulo convexo AOB, forman el *diedro convexo*, limitado por los α y β; y asimismo, los semiplanos que parten de *m* y pasan por alguna de las infinitas semirectas del ángulo cóncavo AOB, forman el *diedro cóncavo* también limitado por los α y β.

Los planos α y β que limitan un diedro se llaman *caras del diedro* y la recta *m* se llama *arista* del diedro.

Diedros llanos.—Traza otra recta *m*, y dos semiplanos α y β que parten de *m* y están en prolongación, o sea en un plano. Si trazas por un punto O de la arista *m* un plano secante, cortará a los α y β en dos semirectas OA y OB que están en prolongación y que determinan *dos ángulos llanos*. Las infinitas semirectas que los forman, determinan con *m* semiplanos que forman dos *diedros llanos*. Todo diedro convexo es menor que un llano y todo diedro cóncavo es mayor que un llano. También esos diedros llanos son dos partes en que ha quedado dividido el haz de arista *m* por los semiplanos α y β, que son las caras de dichos diedros.

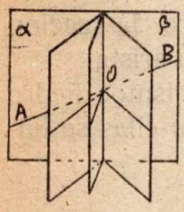


Fig. 2.ª

En resumen:

Se llama ángulo diedro una parte de un haz de semiplanos limitada por dos semiplanos del haz.

La arista del haz se llama arista del diedro y los semiplanos que limitan a éste se llaman caras del diedro.

Diedro llano es el que tiene sus caras en prolongación una de otra, es decir, en un mismo plano.

Diedro convexo es todo diedro menor que un llano y diedro cóncavo es todo diedro mayor que un llano.

2. Sección normal de un diedro.

Traza un diedro de caras α y β, (figura 3.ª). Por un punto O de su arista se supone trazado un plano perpendicular a ella, el cual cortará al diedro en un ángulo rectilíneo de lados OA y OB, ángulo que se llama *sección normal del diedro o rectilíneo correspondiente del diedro*. Por otro punto O' traza otra sección normal del diedro, cuyos

lados serán O' A' y O' B'. Esas dos secciones normales de un mismo diedro son iguales, porque son ángulos de lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido. La amplitud común a esas dos secciones normales y a todas las demás que se pueden trazar en el diedro, se llama también *amplitud del diedro*, de manera que si la sección normal de un diedro mide por ejemplo 60°, la amplitud del diedro será también 60°.

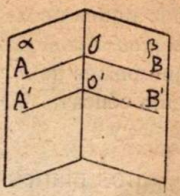


Fig. 3.ª

En resumen:

Se llama sección normal de un diedro la sección producida por un plano perpendicular a su arista.

Todas las secciones normales de un mismo diedro son iguales entre sí y la amplitud común a ellas se llama también amplitud del diedro.

3. Igualdad de diedros.

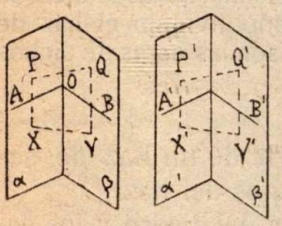


Fig. 4.ª

Dibuja un diedro $\alpha\,\vartheta$ (figura 4 ª). Dibuja otro diedro $\alpha'\,\vartheta'$, que pueda coincidir con el primero por movimiento.

Además de este concepto intuitivo de igualdad de diedros, fundado en el movimiento, se puede dar un concepto riguroso aplicando la definición rigurosa de figuras iguales que estudiaste en la geometría plana. Según esta segunda definición *esos dos diedros serán iguales si se pueden hacer corresponder punto a punto, de manera que todo segmento P Q, que une dos puntos del primer diedro, sea igual al segmento P' Q' que une los puntos homólogos del segundo.*

Traza las dos *secciones normales* AOB y A'O'B' de dichos dos diedros. La intuición te dice que esas secciones normales *serán iguales, y, recíprocamente*, que si dos secciones normales de dos diedros son iguales, también los diedros lo serán. Esta condición de igualdad se puede también demostrar rigurosamente, demostración que se indica en la misma figura, pero que no detallamos en obsequio a la brevedad.

En resumen:

Se dice que dos diedros son iguales cuando pueden

coincidir por el movimiento; y la condición necesaria y suficiente para que dos diedros sean iguales es que lo sean sus secciones normales.

4. Diedros especiales.

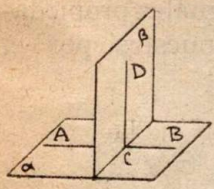


Fig. 5.ª

Diedro recto.—Traza un plano α y una recta AB situada en ese plano (figura 5.ª). Por un punto C de la recta AB trázale una perpendicular que esté también situada en el plano α, y traza otra recta CD que sea perpendicular al plano α y por tanto a la recta AB. Traza el plano δ determinado por las dos perpendiculares trazadas a la recta AB. Los diedros que forman los planos α y β tienen por secciones normales ángulos rectos, pues los ángulos BCD y ACD son rectos y por eso esos diedros se llaman *diedros rectos* y los planos α y β se llaman *planos perpendiculares*.

Cuando dos diedros suman un llano se llaman *suplementarios* y cuando suman un recto, se llaman *complementarios*.

Diedros adyacentes y opuestos por la arista.—A los ángulos adyacentes de la geometría plana, corresponden los *diedros adyacentes,* que serán los dos diedros en que es dividido un diedro llano por un semiplano interior a él; y a los ángulos opuestos por el vértice corresponden los *diedros opuestos por la arista,* que son dos diedros tales que las caras de uno son prolongación de las caras del otro. Así como los ángulos adyacentes son suplementarios y los ángulos opuestos por el vértice son iguales, resultará que *los diedros adyacentes son suplementarios y los diedros opuestos por la arista son iguales.* Todo ángulo tiene una bisectriz que lo divide en dos partes iguales. De igual manera, todo diedro tiene un *semiplano bisector,* que lo dividirá en dos partes iguales. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares y las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice están en prolongación, y de igual manera *los semiplanos bisectores de dos diedros adyacentes serán perpendiculares y los semiplanos bisectores de dos diedros opuestos por la arista estarán en prolongación.*

En resumen:

Se llama diedro recto la mitad de un diedro llano.

Diedros suplementarios son los que suman un llano

y diedros complementarios los que suman un diedro recto.

Se llaman planos perpendiculares los que forman diedros rectos.

Diedros adyacentes son los que componen un llano y diedros opuestos por la arista los que tienen sus caras en prolongación. Estos diedros tienen iguales propiedades que los ángulos adyacentes y opuestos por el vértice.

5. Planos que pasan por una perpendicular a otro plano.

Traza un plano α, (figura 6.ª). Toma en él un punto A. Traza por ese punto la perpendicular p al plano α. Parece que todos los planos que pasan por p, son perpendiculares al α. En efecto: traza un plano β que pase por p, y vamos a probar que β es perpendicular a α.

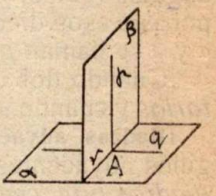


Fig. 6.ª

Para verlo llama r la intersección de α con β. Traza por A, en el plano α una perpendicular q a la recta r. Entonces el ángulo que forman p y q será la sección normal del diedro $\alpha\ \beta$, porque el plano pq es perpendicular a la recta r. Y ese ángulo pq es recto por ser p perpendicular al plano α, luego el ángulo diedro $\alpha\ \beta$ también será recto.

En resumen:

Si una recta es perpendicular a un plano, todos los planos que pasen por la recta son perpendiculares al primero.

6. Plano perpendicular a una recta de otro.

Dibuja un plano α y traza en él la recta q. Traza luego un plano β que sea perpendicular a esa recta q. Parece que el plano β es entonces perpendicular al plano α.

En efecto: como la recta q es perpendicular al plano β, todos los planos que pasen pasan por q, entre ellos el α, son perpendiculares a este plano β.

En resumen:

Si un plano es perpendicular a una recta de otro, será también perpendicular a este otro plano.

7. Recta y plano perpendiculares a otro plano.

Traza un plano α, y otro plano β, perpendicular al α. Traza una recta p también perpendicular al α. Parece que este plano β y esa recta p, que son perpendiculares a un mismo plano α, serán paralelos entre si o que p está en β.

En efecto: traza por p un plano γ que sea perpendicular a la intersección de α y β, lo cual se puede hacer porque p es normal a dicha intersección. Entonces la intersección de β y γ será también perpendicular al plano α, porque es perpendicular a dos rectas de este plano que son las intersecciones de α con β y γ. Resulta, pues, que la recta p, y la intersección β γ son perpendiculares a un mismo plano α. Por tanto, o son paralelas o coinciden, luego la recta p, o es paralela al plano β o está situado en él.

En resumen:

Si una recta y un plano son perpendiculares a otro plano, serán paralelos entre sí o la recta está en el plano.

8. Planos perpendiculares a un tercero.

Traza un plano γ, y traza dos planos α y β que sean perpendiculares al plano γ. Parece que la intersección p de estos dos planos es también perpendicular al plano α.

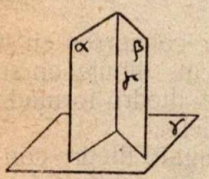


Fig. 7.ª

En efecto: si por cualquier punto de esa intersección trazamos la perpendicular al plano γ, esa perpendicular no podrá ser paralela ni al plano α ni al plano β, y por tanto tendrá que estar contenida en los dos planos, y coincidirá con su intersección p, la cual será por tanto perpendicular al γ.

En resumen:

Si dos planos que se cortan son perpendiculares a

un tercero, su intersección es perpendicular a este tercero.

9. Plano perpendicular a otro por una recta.

Traza un plano α (figura 8.ª). Traza una recta *r*, que no sea perpendicular a este plano α. Parece que existe un plano y solo uno que pasa por *r* y es perpendicular al α.

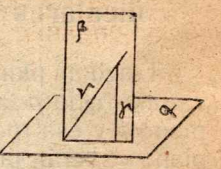


Fig. 8.ª

En efecto: por un punto de *r* traza una recta *p* perpendicular al plano α. Traza el plano β, determinado por las rectas *r* y *p*. Este plano β pasa por *r* y es perpendicular al α, porque también pasa por la recta *p*, perpendicular al α. Cualquier otro plano β' que pase por *r*, no podrá ser perpendicular al α, porque no contendrá a la recta *p*. Luego hay un solo plano β que pase por *r* y es perpendicular al α.

En resumen:

Por una recta que no sea perpendicular a un plano, puede trazarse otro plano perpendicular al primero y solo uno.

Ejercicios

1. Dibuja un rectoedro, cuya superficie estará formada por seis rectángulos. Llama ABCD los vértices sucesivos de una de sus caras y llama A'B'C'D' los vértices de la cara opuesta, de tal manera que sean aristas los segmentos AA', BB' CC', DD'. Expresa las posiciones relativas de perpendicularidad o paralelismo que ocupan las tres caras que concurren en el vértice C', con las tres que concurren en el vértice A.
2. Suponiendo que las tres aristas que concurren en A miden: AB=3 cm., AD=4 cm. y AA'=5 cm. dibuja en su verdadera magnitud la sección normal del diedro formado por la cara ABCD y el plano diagonal ABC'D'.
3. Calcula la amplitud de ese mismo ángulo diedro considerado en el problema anterior, utilizando las tablas trigonométricas.
4. Dibuja la sección normal y calcula la amplitud del diedro agudo formado por los planos diagonales AA'C'C y BB'D'D.

TEMA 5.º

Proyecciones ortogonales

1. Proyecciones de una figura sobre un plano.

Proyección de un punto.—Dibuja un plano α (figura 1.ª). Toma un punto A, exterior a ese plano. Traza la perpendicular al plano α por el punto A, y llama A' el pie de esa perpendicular. Este punto A' se llama *proyección del punto A sobre el plano* α. Al plano se le llama *plano de proyección* y a la perpendicular AA' se la llama *proyectante*.

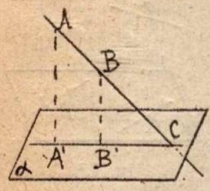


Fig. 1.ª

Proyección de una figura.—Traza una recta oblícua que pase por A, y corte al plano α en un punto C. La proyección de este punto sobre el plano es el mismo C, porque la perpendicular trazada por C al plano tiene por pie el mismo punto C. Toma en la recta AC otro punto B y proyéctale sobre el plano α, llamando B' a la proyección de B. Se llama proyección de la recta ABC sobre el plano α la figura A'B'C... formada por las proyecciones de todos los puntos de la primera. En este caso particular en el cual *se proyecta una línea recta AB, su proyección es otra recta A'B'*.

Porque todas las proyectantes de los puntos de AB están situadas en el plano perpendicular al α, trazado por la recta AB, y la intersección de estos dos planos será la recta A'B', proyección de la recta AB.

En el caso más particular todavía de que la figura que se proyecta sea *una recta perpendicular al plano de proyección,* todos los puntos de ella se proyectarán *en un solo punto,* que es el pie de esa perpendicular.

En resumen:

Se llama proyección ortogonal de un punto sobre un plano, el pie de la perpendicular trazada desde ese punto al plano; y se llama proyección de una figura sobre un plano, la figura formada por las proyecciones de todos los puntos de la primera. En particular, la proyección de una recta sobre un plano es generalmente otra línea recta, excepto en el caso en el que la recta que se proyecta es perpendicular al plano de pro-

yección, pues entonces la proyección se reduce a un punto.

2. Proyecciones de rectas paralelas.

Traza un plano α (figura 2.ª), y traza dos rectas *a* y *b*, que supondremos representan dos rectas del espacio, *paralelas entre sí*. Proyecta estas dos rectas sobre el plano α; llama *a'* y *b'* a sus proyecciones respectivas. Parece que en general *estas proyecciones son también paralelas entre sí*.

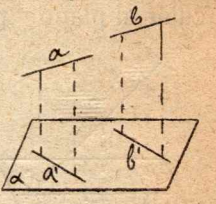


Fig. 2.ª

En efecto: los planos proyectantes de las rectas *a* y *b* son paralelos en general, pues el plano proyectante de la recta *a*, pasa por esta recta, que es paralela al plano que proyecta *b*, y por una cualquiera de las proyectantes de los puntos de *a*, las cuales son también rectas paralelas al plano que proyecta *b*. Por tanto las rectas *a'* y *b'* serán paralelas entre sí, por ser intersecciones de un plano α, con otros dos planos paralelos.

En el caso particular de que las rectas *a* y *b* estuvieran situadas en un plano perpendicular al α, sus proyecciones se confundirían, en una sola recta, y en el caso más particular todavía de que *las rectas* **a** y **b** *fuesen perpendiculares al plano* α, sus proyecciones se reducirían a *dos puntos*, que serían los pies de esas perpendiculares.

En resumen:

Las proyecciones de dos rectas paralelas son también paralelas, en general.

3. Proyecciones de rectas ortogonales.

Teorema directo.—Dibuja un plano α, (figura 3.ª), y dos rectas *m* y *n*, que suponemos representan dos rectas del espacio ortogonales entre sí, siendo la *n* paralela al plano α, o estando contenida en él. Proyecta ortogalmente esas dos rectas sobre el plano α, y llama *m'* y *n'* sus respectivas proyecciones. *Parece que estas proyecciones son rectas perpendiculares.*

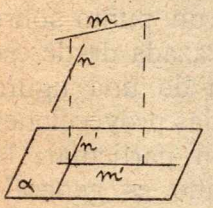


Fig. 3.ª

En efecto: la recta *n'* es perpendicular al plano proyectante de la *m'* porque es ortogonal a dos rectas que se cortan en ese plano: una es la misma *m*, que al

formar ángulo recto con la *n*, también formará ángulo recto con su paralela *n'*; y otra es la proyectante de un punto cualquiera de *m*, pues esa proyectante será perpendicular al plano α, y será ortogonal a todas las rectas de α, y en particular a la *n'*. De ello se deduce que la recta n' es ortogonal a todas las rectas del plano que proyecta *m*, luego será ortogonal a la m', y como m' y n' están en un plano y forman ángulo recto, serán perpendiculares.

Teorema recíproco.—Supongamos ahora que en la misma figura 3.ª no sabemos si las rectas *m* y *n* son o no rectas ortogonales, pero sabemos que *sus proyecciones* **m'** *y* **n'** *son perpendiculares*, y que una de las rectas, la *n*, es paralela al plano α o está contenida en él. Podemos deducir entonces que *las dos rectas* **m** *y* **n** *son ortogales*.

Pues entonces la recta *n* será perpendicular al plano proyectante de la *m*, ya que es ortogonal a dos rectas de este plano, una la *m'*, que al formar ángulo recto con la *n'*, lo formará con su paralela *n*, y otra la proyectante de uno cualquiera de los puntos de *m*, pues al ser esta proyectante perpendicular al plano α, formará ángulo recto con la recta *n'* y con su paralela *n*. De aquí se deduce que la recta *n* será ortogonal a la m, porque es perpendicular al plano que proyecta esta *m*.

Teorema de las tres perpendiculares.—Hay un caso particular del recíproco anterior, que se denomina «Teorema de las tres perpendiculares». Para que lo comprendas dibuja un plano α (figura 4.ª). Traza una recta perpendicular al α, y llámala recta 1, y a su pie llámale O. Traza por este pie una recta 2, situada en α y por un punto A, de la recta 2, traza una recta 3, perpendicular a la 2. Si unes el punto A con otro punto B, situado en la recta 1, se obtiene la recta de unión AB, que *tiene que ser perpendicular a la recta* 3.

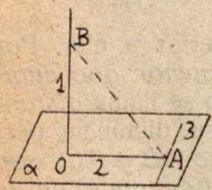


Fig. 4.ª

En efecto: la recta AB y la recta 3 son dos rectas tales que sus proyecciones sobre el plano α, que son las rectas 3 y 2, son perpendiculares, y una de aquellas rectas, la 3, está situada en el plano de proyección, que es α, luego esas rectas 3 y AB serán ortogonales, y como se cortan en un punto A, serán perpendiculares. Por lo demás este caso particular se puede demostrar directamente, observando que la recta 3 es perpendicular al plano ABO; por ser ortogonal a dos rectas de este plano, la 1 y la 2, luego será perpendicular a la recta AB.

En resumen:

Si dos rectas son ortogonales, y una de ellas es paralela a un plano, o está contenida en él, sus proyec-

ciones ortogonales sobre este plano son perpendiculares.

Recíprocamente: si las proyecciones de dos rectas son perpendiculares, y una de las rectas es paralela al plano de proyección, o está contenida en él, esas rectas son ortogonales.

El llamado teorema de la tres perpendiculares es un caso particular de este recíproco.

4. Perpendiculares y oblícuas a un plano.

Traza un plano α, y toma un punto A, exterior a él, (figura 5.ª). Traza la perpendicular al plano α por el punto A, y llama O su pie. Toma luego, a partir de O, en el plano α, varios segmentos OB, OC, OD, OF, que supondremos representan segmentos del espacio, y une los extremos no comunes de estos segmentos con el punto A. Tienes así varias distancias *oblícuas* y una distancia *perpendicular,* trazadas desde el punto A hasta el plano α.

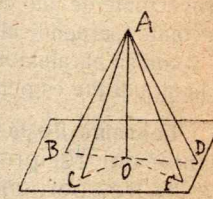


Fig. 5.ª

Con estas distancias se verifican los mismos teoremas que se verificaban en la geometría plana con las distancias desde los puntos de una recta a un punto exterior a ella. Por tanto, *la distancia perpendicular AO, es menor que cualquiera de las distancias oblícuas;* por ello se llama *distancia* desde el punto A hasta el plano α, a esa distancia perpendicular AO. *Si dos oblícuas, tales como AB y AC, son tales que sus pies B y C se separan igual del pie O de la perpendicular, esas oblícuas son iguales;* y si dos oblícuas tales como AB y AD son tales que sus pies se separan desigualmente del pie de la perpendicular, *la que más se separe es la mayor.* Estos teoremas se demuestran como en la geometría plana, o sea comparando los triángulos rectángulos OAB, OAC, etc. Y así, por ejemplo, la perpendicular OA será menor que cualquier oblícua, porque OA es un cateto y cualquier oblícua es hipotenusa de un mismo triángulo.

En resumen:

Si desde un punto exterior a un plano se traza una perpendicular y varias oblícuas, se verifican los mismos teoremas que en la geometría plana cuando se traza

desde un punto exterior a una recta una perpendicular y varios oblícuas a la recta. En particular, la distancia perpendicular es menor que cualquier oblícua y se llama por eso distancia desde el punto al plano.

5. Ángulo de una recta con un plano.

Traza un plano α (figura 6.ª), y por un punto A, exterior a él, trázale una oblícua, cuyo pie llamarás B. Proyecta el punto A sobre el plano α, y llama M a la proyección de A sobre α. A partir de B, toma un segmento BQ igual al BM, pero que esté en prolongación de él. Toma otros dos segmentos BN y BN' iguales al BM en el espacio, y que formen ángulos iguales con él, y toma otro segmento BP que también sea en el espacio igual al BM y BN, pero que forme con BM un ángulo mayor que el formado por BN. Entre todos los ángulos formados por la semirecta BA con las semirectas del plano α, que pasan por su pie, parece *que el menor es el ángulo ABM, formado por BA con su proyección sobre el plano, y que el mayor es el ABQ formado por la semirecta BA con la prolongación de su proyección BM.* Parece también que si dos rectas BN y BN' se separan igual de la proyección BM, forman ángulos iguales con BA y que si una semirecta BP se separa de esa proyección más que lo que se separa otra BN, el ángulo formado por BA con la primera es mayor que el formado con la segunda.

Escribe según eso las relaciones de igualdad o desigualdad que se verifican entre esos ángulos que forma BA con dichas semirectas que pasan por su pie B:

$$ABM < ABN = ABN' < ABP < ABQ$$

Estos teoremas se demuestran considerando los triángulos ABM, ABN..., ABQ, los cuales tienen todos dos lados respectivamente iguales, que son los que concurren en el vértice B, y ya sabes por la geometría plana que según que los terceros lados sean iguales o mayores, así los ángulos en B serán respectivamente iguales o mayores. Para comparar esos terceros lados AM, AN... AQ se aplica el teorema de la perpendicular y las oblícuas trazadas a un plano α por un punto A. En particular, la menor de estas será la perpendicular MA, y

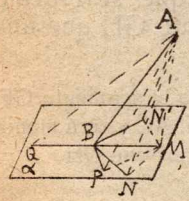


Fig. 6.ª

por eso el menor de dichos ángulos será el ABM formado por la oblicua AB con su proyección, y este ángulo se llama *ángulo de esa oblicua con el plano* α.

En resumen:

Si una recta es perpendicular a un plano, se llama ángulo de esa recta con el plano al ángulo recto, y si una recta es oblicua a un plano, se llama ángulo de esa oblicua con el plano al ángulo que forma ella misma con su proyección sobre este plano. Se demuestra que este ángulo es el menor de todos los ángulos formados por la oblicua con las rectas del plano que pasan por su pie.

6. Mínima distancia entre dos rectas que se cruzan.

Traza dos rectas *m* y *n* (figura 7.ª), que supondremos representan dos rectas *que se cruzan*. Traza por *n* el plano α que es paralelo a *m*. Ese plano queda determinado por la recta *n* y por una paralela trazada a la recta *m* por un punto cualquiera de *n*. Si supones trazados los planos perpendiculares al α, por las rectas *m* y *n*, esos planos se cortarán en una recta AC, que será perpendicular al plano α, recta que tiene que cortar a las rectas *m* y *n* en dos puntos A y C, y que será perpendicular a ambas, puesto que lo es al plano α.

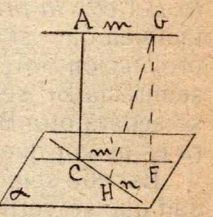


Fig. 7.ª

En particular, el punto C será punto de intersección de la recta *n* con la proyección de *m* sobre el plano α, proyección que puedes dibujar y llamarla *m'*. El segmento AC se llama *mínima distancia* entre las dos rectas que se cruzan, porque es menor que cualquier otro segmento GH que una un punto de *m* con otro de *n*.

En efecto trazado el segmento GH, traza luego el segmento GF, perpendicular al plano α. Este segmento será igual al AC y será menor que el segmento oblícuo GH, por tanto AC será menor que GH.

En resumen:

A dos rectas que se cruzan se puede trazar una perpendicular común y solo una, y el segmento com-

prendido entre los puntos de intersección de esa perpendicular, se llama distancia entre las rectas, o mínima distancia, porque es menor que cualquier otro segmento que una dos puntos, uno de cada recta.

Ejercicios

1. Dibuja un cubo; llama ABCD los vértices sucesivos de una cara y A'B'C'D' los vértices de la cara opuesta, de manera que sean aristas los segmentos AA', BB', CC', DD'. Señala cuáles son las aristas que se cruzan y cuál es el ángulo formado por la diagonal AC', con la cara ABCD.
2. Suponiendo que el cubo tiene de arista 5 cm., dí cuál será la longitud de la mínima distancia entre dos aristas que se cruzan.
3. Si un segmento de 4 cm. se proyecta sobre un plano, con el cual forma un ángulo de 60°, constrúyase gráficamente la proyección y calcúlese su longitud.
4. Calcúlese el ángulo que debe formar un segmento con un plano, para que al proyectarse el segmento sobre el plano resulte una proyección que sea la tercera parte del segmento que se proyecta.

TEMA 6.°

Angulos poliédricos

1. El concepto de triedro.

Dibuja un triángulo ABC (figura 1.ª), que supondremos representa en el espacio un triángulo situado en un plano casi horizontal, y con el vértice B hacia adelante. Toma un punto O exterior al plano del triángulo. Hay infinitas semirectas o rayos que parten del punto O y pasan por algún punto del triángulo ABC. Traza los tres rayos OA, OB y OC que pasan por los vértices del triángulo. Esos infinitos rayos forman una figura que se llama *triedro,* el cual será una parte de la radiación de semirectas de vértice O. Los rayos OA, OB y OC se llaman *aristas* del triedro. Los tres ángulos OAB, OAC y BOC se llaman *caras* del triedro y entre los tres forman la superficie de este triedro. Esto es lo que da el nombre a la figu-

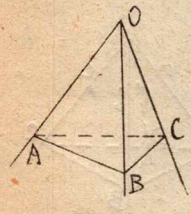


Fig. 1.ª

ra, porque la palabra *triedro* significa *tres caras*. Cada dos caras limitan un diedro convexo que se llama *diedro del triedro*. Este tendrá por consiguiente tres diedros, cuyas aristas son las mismas del triedro. El punto O común a las tres aristas se llama *vértice* del triedro. El segmento AC se ha dibujado de puntos porque está detrás y se supone que no se ve.

En resumen:

Se llama triedro la figura formada por todas las semirectas o rayos que parten de un punto, llamado vértice, y pasan por algún otro punto de un triángulo cuyo plano no contiene a ese vértice. Los rayos que pasan por los vértices del triángulo se llaman aristas del triedro. Cada uno de ellos es arista de uno de los diedros del triedro y cada dos de ellas determinan una cara del triedro, el cual tendrá, por tanto, tres caras.

2. Relaciones de desigualdad entre las caras de un triedro.

Los triedros tienen propiedades que muchas veces son análogas a las propiedades de los triángulos, pudiéndose deducir un enunciado de otro, sin más que sustituir las palabras vértices, lados o ángulos de los triángulos, por las palabras aristas, caras o diedros del triedro. Y así, por ejemplo, te acordarás que en todo triángulo *todo lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia*. Análogamente en el triedro se verifica que *toda cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia*.

Para demostrar el teorema de la suma bastará que lo demostremos para alguna cara que sea *mayor* que cualquiera de las otras dos, porque si otra cara es igual o menor que alguna de las otras dos, desde luego será menor que su suma.

Dibuja pues un triedro de vértice O y cuyas aristas las llamarás *a, b* y *c*. Puedes suponer que la cara *ac* es mayor que cualquiera de las otras dos, y debemos demostrar que tiene que ser menor que la suma de estas otras dos. Para ello divide la cara *ac* en dos partes por medio de una semi-

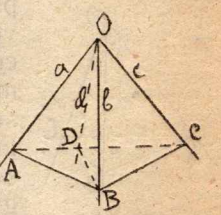


Fig. 2.ª

recta *d*, de tal manera que la parte o ángulo *cd* sea igual al *cb*. Expresa esa igualdad: $\widehat{cd}=\widehat{cb}$. Toma luego dos puntos A y C situados respectivamente en las aristas *a* y *c*, y traza el segmento AC, que cortará a la semirecta *d* en un punto D. Toma en la tercera arista *b* un segmento OB que sea igual en el espacio al segmento OD. Escribe tal igualdad: OB=OD, y une B con D. El triángulo AOC resulta dividido por el segmento OD en dos triángulos, uno de los cuales, el COD, es igual al triángulo COB, por tener respectivamente iguales los dos pares de lados que concurren en O y el ángulo comprendido. El otro triángulo AOD, comparado con el AOB, se ve que tienen también iguales los dos pares de lados que concurren en O, pero los terceros lados AB y AD son desiguales, siendo el AB mayor que el AD, porque si al primero le sumas BC y al segundo le sumas un segmento igual, DC, la primera suma resulta mayor que la segunda. De esto se deduce que los ángulos opuestos a estos terceros lados son desiguales en el mismo orden. Expresa tal desigualdad: $\widehat{ad} < \widehat{ab}$. Por tanto, si al primer miembro *ad* le sumas el ángulo *dc* te dará como suma la cara *ac*, que será menor que la suma obtenida sumando al segundo miembro *ab*, una cantidad igual a la anterior o sea *bc*. Expresa esa desigualdad de esas dos sumas: $\widehat{ac} < \widehat{ab}+\widehat{bc}$, como queríamos demostrar.

Para probar ahora que *toda cara es mayor que la diferencia de las otras dos*, basta aplicar el teorema de la suma a la cara que ha de hacer de minuendo, y despejar luego la cara que se quiere comparar con la diferencia de las otras dos; lo mismo que hacíamos en la geometría plana con los triángulos.

En resumen:

En todo triedro, cualquiera de sus caras es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.

3. Suma de las caras de un triedro.

En la geometría plana comprenderías que no hay limitación para la suma de los lados de un triángulo, porque esa suma puede ser tan grande como se quiera, con tal de hacer los lados del triángulo suficientemente grandes. En cambio, en el triedro hay limitación para la suma de sus caras, pues *esa suma tiene que ser menor que cuatro ángulos rectos.*

Para demostrarlo, traza un triángulo ABC, como en la figura 3.ª. Une sus vértices A, B y C con un punto O, exterior al plano del trián-

gulo. Ese punto y ese triángulo determinan un triedro, cuyas aristas puedes llamar *a, b* y *c;* vamos a demostrar que las caras de este triedro, tienen que sumar menos que cuatro ángulos rectos.

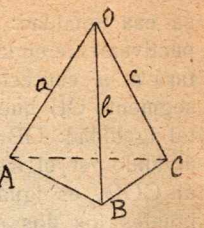


Fig. 3.ª

Para ello observaremos que también los puntos A, B y C son vértices de otros tres triedros, en cada uno de los cuales se verificará que una cara es menor que la suma de los otros dos. Aplicando este teorema a la cara que sea ángulo del triángulo ABC, resultará que la suma de los tres ángulos de este triángulo, que como sabes es igual a dos rectos, será menor que la suma de las otras dos caras de vértice A, mas las otras dos caras de vértice B, mas las otras dos caras de vértice C. Llamando S la suma de estas 6 caras expresa dicha desigualdad:

$$\text{Dos rectos} < S.$$

Por otra parte esos seis ángulos cuya suma es S pertenecen también a los triángulos que tienen por vértice común O, y como los ángulos de los tres triángulos suman seis rectos, la suma S será igual a la diferencia entre estos seis rectos y la suma de las caras del tiedro *abc.* Exprésalo: $S = 6 \text{ rectos} - (ab+bc+ca)$; y como esta diferencia que hay en el segundo miembro tiene que ser mayor que dos rectos, según antes hemos visto, resulta que el sustraendo tendrá que ser menor que cuatro rectos Exprésalo: $ab+bc+ca < 4$ rectos, según queríamos demostrar.

En resumen:

La suma de las caras de un triedro tiene que ser menor que cuatro rectos.

4. Triedros polares o suplementarios.

Observaciones preliminares.

1.ª Traza un plano α en posición horizontal. Por un punto A de ese plano traza una semirecta AB perpendicular a él (figura 4.ª). Traza por AB otro plano β, cuya intersección con α llamarás AD. Toma en el plano β un rayo AC que forme con el AB un ángulo agudo, y otro rayo AE que forme un ángulo obtuso. El rayo AC que forma un ángulo agudo está en la misma región que él respecto del plano α. El rayo AE que forma con AB un ángulo obtuso está en distinta región que ese AB, y el rayo AD que forma ángulo recto está situado en el mismo plano α. Las propiedades recíprocas también se verifican y se demuestran por reducción al absurdo.

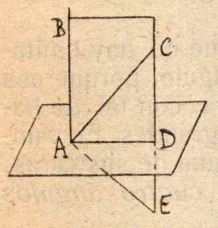


Fig. 4.ª

2.ª Traza ahora dos semiplanos que limiten un diedro convexo (figura 5.ª). Por un punto O de su arista, trázale a ésta dos semirectas perpendiculares *a* y *b*, situadas una cada cara, las cuales limitarán el rectilíneo o sección normal de tal diedro. Traza ahora por el mismo punto O la semirecta *a'* que supondremos es perpendicular a la cara de la semirecta *a*, y de tal manera que *a'* y *b* formen ángulo agudo (o nulo). Traza otra semirecta *b'* que sea perpendicular a la cara de *b*, de tal modo que el ángulo *b'a* sea también agudo o nulo. Se demuestra entonces en la geometría plana que los ángulos *ab* y *a'b'* son suplementarios, por tanto el ángulo *a'b'* y el diedro que habíamos trazado sumarán dos rectos, lo cual se expresa diciendo que son suplementarios.

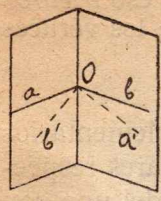


Fig. 5.ª

Triedros suplementarios.

Toma un punto O (figura 6.ª) y traza tres semirectas *a*, *b* y *c* que partan de O; supondremos sean las aristas de un triedro de vértice O. Traza por O un rayo *a'*, que supondremos es perpendicular al plano *bc* y que está situado respecto de ese plano en la misma región que lo está *a;* traza igualmente otros rayos *b'* y *c'* respectivamente perpendiculares a las caras *ac* y *ab* de dicho triedro, y también situados en la misma forma que hemos dicho para *a'*.

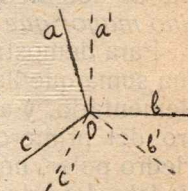


Fig. 6.ª

Resulta de las dos observaciones preliminares que los rayos *a* y *a'* forman ángulo agudo, y lo mismo los *b* y *b'* y los *c* y *c'*, y además el ángulo convexo formado por los rayos *a'* y *b'* será suplementario del diedro de arista *c;* asimismo el ángulo *b'c'* es suplementario del diedro de arista *a*, y el ángulo *a'c'* es suplementario del diedro de arista *b*. Es decir, que las aristas *a'*, *b'*, *c'* forman otro triedro que tiene sus caras suplementarias de los diedros del dado.

Pero sabemos que si dos planos son perpendiculares a un tercero, su intersección es perpendicular a ese tercero, o bien, que si una recta es perpendicular a dos de un plano es perpendicular al plano. Y observando que la *a'* es perpendicular a las *b* y *c*, y que la *b'* es perpendicular a las *a* y *c*, resulta la *c* perpendicular a las *a'* y *b'*, o sea perpendicular a la cara *a'b'*; formando además con la *c'* un ángulo agudo, y estando, pues, en la misma región que ella respecto del plano *a'b'*. Lo mismo decimos de la *b*, que es perpendicular a la cara *a'c'*, y de la *a*, que es perpendicular a la

cara *b'c'*. Luego las caras del tiedro *abc* también serán suplementarias de los diedros del *a'b'c'*.

Esos dos diedros *abc* y *a'b'c'* se llaman por eso *triedros polares* o *suplementarios*. No importaría que los vértices en vez de coincidir fueran distintos.

En resumen:

Dos Triedros se llaman polares o suplementarios cuando las aristas del uno son perpendiculares respectivamente a las caras del otro, y las caras del uno son respectivamente suplementarias a los diedros del otro. No importa que el vértice de ambos sea distinto.

5. Suma de los diedros de un triedro.

En la Geometría plana estudiábamos que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos. El teorema correspondiente en la Geometría del espacio dice que *la suma de los diedros de un triedro no es igual a dos rectos, sino mayor que dos rectos, pero menor que seis.*

Para demostrarlo suponte un triedro cuyos diedros dan una suma que llamarás D. Considera el triedro polar o suplementario, y a la suma de sus caras llámala C. Cada diedro del primero, sumado con la cara correspondiente del triedro polar, nos dá dos rectos, y por consiguiente, los tres diedros del primero, más las tres caras del segundo, sumarán seis rectos. Exprésalo: $C + D = 6$ rectos. Pero sabemos que la suma C tiene que ser menor que cuatro rectos, lo cual exige que la suma D tenga que ser mayor que dos rectos.

Por otra parte D no puede llegar a seis rectos porque algo ha de valer C.

En resumen:

La suma de los diedros de un triedro es mayor que dos rectos y menor que seis.

6. Igualdad de triedros.

Igualdad de figuras en el espacio.

En la Geometría plana estudiamos una definición intuitiva de figuras planas iguales diciendo que eran aquellas que *podían coincidir por el movimiento*. En Geometría del espacio llamaremos figuras *directamente iguales* a las que pue-

den coincidir por el movimiento; pero hay otras figuras que debemos considerar como iguales, aunque no pueden coincidir por el movimiento, y por eso las llamaremos *inversamente iguales*. Tales son por ejemplo las dos manos de una misma persona.

También estudiábamos en la Geometría plana un concepto riguroso de figuras iguales, para lo cual admitíamos primeramente como concepto primitivo, y por tanto sin definición, el concepto de *segmentos iguales o congruentes*, y entonces se podían definir las *figuras iguales* diciendo que son *dos figuras que se corresponden punto a punto, de manera que todo segmento que une dos puntos de la primera figura es congruente con el segmento análogo de la otra.*

Esta definición rigurosa se puede aplicar también a las figuras del espacio, y comprende tanto a las figuras directamente iguales como a las inversamente iguales.

Por ahora no vamos a estudiar más que unas nociones sobre la igualdad de *triedos*.

Triedros opuestos o simétricos.

Traza un triedro de vértice O y aristas a, b y c, como el de la figura 7.ª, en el cual se supone que la arista *b* está hacia adelante. Prolonga las tres aristas más allá del vértice, dibujando de puntos la prolongación de *b*, porque estará detrás y no se ve. Estas tres prolongaciones *a'* *b'* y *c'*, serán aristas de otro triedro, cuyas caras son iguales a las de *a b c*, por ser ángulos opuestos por el vértice, y los diedros también serán iguales a los de *a b c*, por ser diedros opuestos por la arista. En el caso general en que esos triedros tengan desiguales las tres caras, no pueden coincidir por el movimiento, pues son *inversamente iguales*. En todo caso los llamaremos *triedros opuestos o simétricos*.

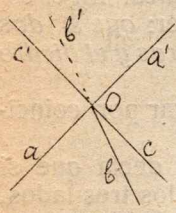


Fig. 7.ª

Triedros directamente iguales e inversamente iguales.

Intuitivamente podremos definir los *triedros directamente iguales* diciendo que son aquellos triedros que pueden coincidir por el movimiento, y que, por tanto, tienen respectivamente iguales las tres caras y los tres diedros; y diremos que dos triedros son inversamente iguales cuando cada uno de ellos es directamente igual con el triedro simétrico del

otro. Esos dos triedos inversamente iguales tendrán también respectivamente iguales las tres caras y los tres diedros.

Criterios de igualdad de triedros.

En la Geometría plana estudiaste varios criterios de igualdad de triángulos, por medio de los cuales podía deducirse la igualdad de dos triángulos en cuanto se supiera que tenían tres elementos respectivamente iguales, que en cada criterio se especifican.

En la Geometría del espacio hay criterios análogos para la igualdad de triedros, aunque no se corresponden exactamente con aquéllos.

Un primer criterio sobre los triángulos decía que si dos triángulos tenían respectivamente iguales un lado y los dos ángulos adyacentes, esos triángulos son iguales y se podía demostrar por coincidencia. Análogamente se verifica que *si dos triedros tienen respectivamente iguales una cara y los dos diedros adyacentes, esos triedros son iguales, y también se puede demostrar por coincidencia.*

Ese primer criterio de igualdad de triángulos se ampliaba todavía al caso en que tuvieran iguales un lado, el ángulo opuesto y otro ángulo; pero en los triedros el criterio análogo es un caso dudoso.

Un segundo criterio de igualdad de triángulos decía que si dos triángulos tenían respectivamente iguales dos lados y el ángulo comprendido, los triángulos son iguales. En el espacio se verifica un criterio análogo, a saber: *que si dos triedos tienen respectivamente iguales dos caras y el diedro comprendido, esos triedros son iguales.*

También este criterio se puede demostrar por coincidencia.

El tercer criterio de igualdad de triángulos decía que si dos triángulos tienen respectivamente iguales los tres lados, esos triángulos son iguales, que ya no se puede demostrar por coincidencia, pues había que deducirlo de los criterios anteriores.

Análogamente, en el espacio se verifica que *si dos Triedros tienen respectivamente iguales las tres caras, esos triedros son iguales;* lo cual tampoco puede demostrarse por coincidencia, sino que exige una demostración más larga que no detallamos por brevedad. Solo advertiremos que en la figura 8.ª está indicada la demostración rigurosa, fundada en la definición rigurosa de figuras iguales.

El criterio dudoso de la igualdad de triángulos, que se

refiere al caso de que tengan respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, corresponde a otro criterio dudoso de igualdad de triedros.

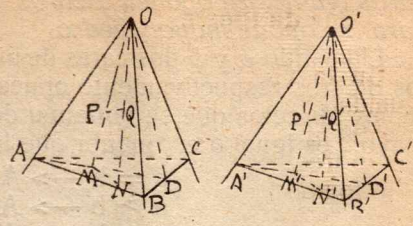


Fig. 8.ª

En fin, en el caso de los triedros hay un criterio que dice que *si dos triedros tienen respectivamente iguales los tres diedros, esos triedros son iguales;* lo cual es verdad porque sus triedros polares tendrán respectivamente iguales las tres caras y serán iguales, lo que exige que también tengan iguales los tres diedros, y por consiguiente que tengan iguales las tres caras los triedros primitivos.

En el caso de que dos triángulos tienen respectivamente iguales los tres ángulos, en general no son iguales, sino simplemente *semejantes*.

En resumen.

Se llaman triedros opuestos o simétricos dos triedros tales que las aristas del uno están en prolongación de las aristas del otro. Se dice que dos triedros son directamente iguales cuando pueden coincidir por el movimiento; y se dice que son inversamente iguales cuando uno de ellos es directamente igual al simétrico del otro.

Hay varios criterios para deducir la igualdad de dos triedros, a saber: cuando tienen respectivamente iguales una cara y los diedros adyacentes; o dos caras y el diedro comprendido; o las tres caras; o los tres diedros.

7. Relaciones entre las caras y los diedros opuestos.

En la Geometría plana estudiábamos las relaciones de igualdad o desigualdad entre los lados de un triángulo y los ángulos opuestos, relaciones que se condensaban en estos teoremas: A lados iguales se oponen ángulos iguales, y recíprocamente; y asímismo, y a mayor lado se opone mayor ángulo, y recíprocamente.

En estos enunciados están comprendidos tres teoremas

y sus tres recíprocos, que se verifican análogamente para los triedros; pues también en los triedros se verifica que *a caras iguales se oponen diedros iguales, y que a mayor cara se opone mayor diedro.*

Llamando *a* y *b* dos caras de un triedro y llamando A y B los diedros respectivamente opuestos, escribe los tres teoremas directos que se obtienen de suponer que la cara *a* es mayor, es igual o es menor que la cara *b*.

$$a = b \longrightarrow A = B$$
$$a > b \longrightarrow A > B$$
$$a < b \longrightarrow A < B$$

Y escribe ahora los tres teoremas recíprocos:

$$A = B \longrightarrow a = b$$
$$A > B \longrightarrow a > b$$
$$A < B \longrightarrow a < b$$

Aunque los seis teoremas son análogos a los de la geometría plana, no pueden ser análogas todas las demostraciones, porque no hay completa analogía entre los criterios de igualdad de triángulos y la igualdad de triedros.

Solo vamos a demostrar que *a caras iguales se oponen diedros iguales*, y recíprocamente; para lo cual se considera un triedro que tiene dos caras *a* y *b* iguales, y se divide en dos triedros por un plano bisector del diedro comprendido entre las dos caras iguales. Esos dos triedros que se forman tienen respectivamente iguales dos caras y el driedro comprendido, y serán iguales; de lo cual se deduce la igualdad de los diedros A y B opuestos a las caras *a* y *b*.

El teorema recíproco de este, o sea, el que dice que *a diedros iguales se oponen caras iguales,* se demuestra inmediatamente considerando el triedro polar del primero, pues si este primero tiene dos diedros iguales, el segundo tendrá dos caras iguales, y según el teorema directo, deberá tener también dos diedros iguales, de lo cual se deduce que el primero tendrá dos caras iguales, como queríamos demostrar.

Estos diedros que tienen dos caras iguales, y dos diedros respectivamente opuestos también iguales, se llaman *triedros isósceles.*

En resumen:

En los triedros se verifica que a caras iguales se oponen diedros iguales y recíprocamente, y que a mayor cara se opone mayor diedro y recíprocamente. Los triedros que tienen dos caras iguales y los diedros opuestos también iguales se llaman triedros isósceles.

8. Angulos poliédricos o anguloides.

Dibuja un polígono ABCDE situado en posición casi horizontal, (figura 9.ª). Toma un punto O exterior a su plano. Los infinitos rayos que parten de O y pasan por algún punto del polígono, forman una figura que se llama *ángulo poliédrico* o *anguloide*.

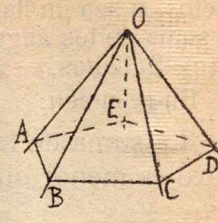


Fig. 9.ª

Dibuja sus aristas, que son las semirectas OA, OB, OC, OD y OE, que parten del punto O, llamado *vértice,* y que pasan por cada uno de los vértices del polígono.

Se llaman *caras* del ángulo poliédrico los ángulos limitados por cada dos aristas consecutivas, es decir, los ángulos formados por los infinitos rayos que parten de O y pasan por algún punto perteneciente a un lado del polígono.

Nombra dichas caras: AOB, BOC, COD, DOE y EOA.

Según que el polígono sea convexo o cóncavo así el ángulo poliédrico se llamará *convexo* o *cóncavo;* y según que el número de caras sea 3, 4, 5, etc.; así el ángulo poliédrico se llama *ángulo triedro,* o simplemente *tiedro, ángulo tetraédrico, ángulo pentaédrico,* etc. Cuando son tres caras se puede suprimir la palabra *ángulo,* porque ya veremos que para cerrar un cuerpo finito se necesitan por lo menos cuatro caras.

En resumen:

Se llama ángulo poliédrico la figura formada por todas las semirectas que parten de un punto, llamado vértice, y pasan por algún punto de un polígono, cuyo plano no contiene a dicho vértice. Entre esas semirectas, las que pasan por los vértices del polígono se llaman aristas del ángulo poliédrico, y las que pasan por algún punto de uno cualquiera de los lados del polígono, forman una cara del ángulo poliédrico. Según el número de caras sea 3, 4, 5, etc. así se llama ángulo triedro, ángulo tetraédrico, ángulo pentaédrico, etc.

9. Suma de las caras de un ángulo poliédrico convexo.

Por un razonamiento análogo al que hemos hecho para

los triedros, se puede demostrar que *también es mayor que cuatro rectos la suma de las caras de un ángulo poliédrico convexo;* y así como antes aplicamos el teorema de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos, o sea un llano, habrá que aplicar el teorema de que la suma de los ángulos de un polígono de *n* lados es igual a (n—2) llanos.

En resumen:

La suma de las caras de un ángulo poliédrico convexo es menor que cuatro rectos.

Ejercicios

1. Las tres aristas que concurren en cualquier vértice de un cubo son aristas de un triedro. Escribe cuánto suman las tres caras de este triedro y cuanto suman los tres diedros.
2. Si en el cubo se traza un plano diagonal que deberá pasar por dos aristas paralelas, cada uno de los cuatro triedros, cuyos vértices están en una de esas dos aristas, es dividido por dicho plano en otros dos diedros. Dígase el valor en grados de cada una de las caras, y de cada uno de los diedros de uno cualquiera de esos triedros parciales que se han formado.
3. Dígase igualmente el valor en grados de cada una de las caras y cada uno de los diedros del triedrio polar o suplementario del que se ha considerado en el párrafo anterior.

4. Demuéstrese con detalle que las caras del ángulo poliédrico dibujado en la figura 9.ª suman menos que cuatro ángulos rectos, para lo cual se hará un razonamiento análogo al que se hizo para los triedros.

TEMA 7.º

Superficie prismática y prisma

1. Superficie prismática

Dibuja un polígono ABCDE, situado en un plano casi horizontal, como en la figura 1.ª. Traza rectas que sean paralelas entre sí, y que pasen cada una por un vértice del

polígono, sin que estén en el mismo plano que este polígono. Por cada punto del contorno del polígono puede trazarse también una recta que sea paralela a las anteriores, y el conjunto de todas las infinitas rectas que así se pueden trazar recibe el nombre de *superficie prismática indefinida.*

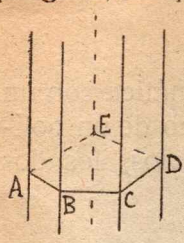


Fig. 1.ª

Las rectas que pasan por los vértices del polígono y pertenecen a la superficie prismática reciben el nombre de *aristas* de la misma; y todas las rectas de la superficie, que pasan por los puntos de un mismo lado del polígono, forman lo que se llama *cara.* Las rectas que constituyen la superficie se llaman *generatrices,* porque en lenguaje intuitivo la superficie se puede suponer engendrada por una recta que se mueve apoyándose en el contorno de un polígono y siendo paralelas todas sus posiciones.

En resumen:

Se llama superficie prismática indefinida la figura formada por todas las rectas que son paralelas entre sí y pasan por algún punto del contorno de un polígono, sin que estén en el plano de este polígono. En particular, las rectas de esa superficie que pasan por los vértices del polígono, se llaman aristas de la superficie prismática.

2. Secciones planas.

Si una superficie prismática es cortada por un plano que encuentra a una generatriz, cortará éste a todas las generatrices, ya que son paralelas, y *la sección será el contorno de un polígono,* cuyos lados son las intersecciones del plano secante con las caras de la superficie y los vértices serán las intersecciones con las aristas.

En particular, si la misma superficie prismática la cortamos por *dos planos paralelos* que corten a todas sus generatrices, las secciones son contornos de *dos polígonos iguales y de lados paralelos;* puesto que al ser cortada cada cara por dos planos paralelos, las intersecciones son paralelas, e iguales, por tanto; y por otra parte, los ángulos de una sección son iguales a los de otra, por ser ángulos de lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido.

Cuando un plano es paralelo a una generatriz, lo será a las demás, o contendrá alguna de ellas.

En resumen:

La intersección de una superficie prismática con un plano que corte a sus aristas es el contorno de un polígono; y si se corta por dos planos paralelos, los dos polígonos son iguales.

3. Prisma indefinido.

Dado un polígono, consideremos todas las rectas paralelas entre sí, que no están en el plano del polígono, pero que pasan por algún punto del mismo, ya sea del contorno o ya punto interior; todas esas rectas forman una figura que se llama *prisma indefinido*. De entre esas rectas las que pasan por algún punto del contorno forman una superficie prismática, que se llama *superficie del prisma indefinido;* y sus aristas y caras se llaman *aristas* y *caras del prisma*. Cada dos caras consecutivas determinan un diedro que se llama *diedro del prisma*.

En resumen:

Se llama prisma indefinido la figura formada por todas las rectas que son paralelas entre sí, y pasan por algún punto de un polígono, cuyo plano no contiene a esas rectas.

4. Prisma finito.

Un prisma finito es una parte de un prisma indefinido, comprendida entre dos planos paralelos que cortan a una, y por consiguiente, a todas las rectas que componen el prisma indefinido.

Los polígonos iguales, secciones del prisma indefinido por los planos paralelos, se llaman *bases del prisma;* y son, como sabemos, iguales y de lados paralelos. Los segmentos que unen cada dos puntos homólogos de ambas bases forman la totalidad del prisma.

Dibuja, por ejemplo, un prisma finito cuyas bases son polígonos de cinco lados, igual que en la figura 2 ª

La porción de la superficie del prisma indefinido comprendida entre las bases del prisma finito, se llama *superficie lateral de éste,* la cual está formada por *paralelogra-*

mos, teniendo cada uno dos lados en las bases, lados que se llaman *aristas básicas,* y otros dos lados en la superficie lateral, los cuales se llaman *aristas laterales.* Es claro que *todas las aristas laterales son iguales,* porque cada una pertenece a dos paralelogramos, y en éstos, los lados opuestos son iguales. La superficie total del prisma finito está formada por la superficie lateral y las bases.

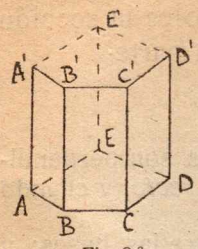


Fig. 2.ª

Cada dos caras laterales consecutivas determinan un diedro que se llama *diedro lateral,* y cada cara lateral determina con las dos bases, dos diedros que se llaman *diedros básicos.* Los vértices de las bases, se llaman también *vértices del prisma finito,* y son vértices de *triedros,* cuyas tres aristas son las que concurren en cada vértice.

En resumen:

Se llama prisma finito una parte de un prisma indefinido comprendido entre dos planos paralelos que cortan a sus aristas. Por tanto, la superficie del prisma estará formada por dos polígonos iguales y paralelos que se llaman bases, y por tantos paralelógramos como lados tienen las bases. Esos paralelógramos forman la superficie lateral del prisma. Todos los polígonos que componen la superficie total del prisma se llaman caras de éste. Sus vértices se llaman vértices del prisma, y sus lados se llaman aristas del prisma.

5. Sección recta de un prisma.

Se llama *sección recta* de una superficie prismática, o de un prisma indefinido, la sección producida por un plano perpendicular a sus aristas. Basta que lo sea a una, para que lo sea a todas las demás, pues son paralelas.

Y se llama sección recta de un prisma finito la producida por un plano perpendicular a todas las aristas laterales, sobre la superficie del prisma indefinido correspondiente.

Siempre, los lados del polígono, sección recta, son perpendiculares a las aristas laterales.

En resumen:

La sección recta de un prisma indefinido es la sec-

ción producida por un plano perpendicular a sus aristas, y la sección recta de un prisma finito es la sección recta del prisma indefinido de que forma parte.

6. Prisma recto y oblícuo.

Cuando en un prisma las aristas laterales son perpendiculares a las bases del prisma, éste se llama *recto;* y cuando no, se llama *oblícuo*.

Altura de un prisma es la distancia entre las bases; y ésto nos dice que en el prisma recto la altura es igual a la arista lateral, mientras que en el prisma oblicuo es menor.

La *sección recta del prisma recto* es igual a las bases.

En resumen:

Un prisma finito se dice que es recto cuando las aristas laterales son perpendiculares a las bases, y prisma oblicuo cuando no lo son.

7. Clasificación de los prismas.

Las superficies prismáticas y los prismas indefinidos se clasifican según el número de caras, y los prismas finitos según el número de caras laterales, en *triangulares, cuadrangulares, pentagonales, exagonales,* etc. Así, un prisma exagonal será un prisma cuyas bases son exágonos. Los prismas indefinido y finito indicados en las figuras 1.ª y 2.ª respectivamente, son pentagonales.

En particular, cuando un prisma finito es recto, y sus bases son polígonos regulares, el prisma se llama *regular.*

Para que lo sean los prismas indefinidos o las superficies prismáticas, basta que lo sean sus secciones rectas.

En resumen:

Los prismas pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, exagonales, etc., según que el número de caras laterales sea 3, 4, 5, 6, etc. Los prismas finitos pueden ser regulares o irregulares, llamándose prisma regular al que es recto y tiene por bases polígonos regulares.

8. Desarrollo de la superficie de un prisma.

Se llama desarrollo de una superficie prismática o lo que es igual de la superficie de un prisma indefinido, a una zona

plana comprendida entre dos rectas paralelas, cuya distancia es igual al perímetro de la sección recta. Obedece esta definición a un concepto intuitivo, según el cual, si cortamos idealmente la superficie prismática por una arista y la extendemos (desarrollamos) sobre un plano, se obtiene una suma de zonas, cada una de las cuales es igual a una cara de la superficie, y entre todas componen lo que hemos llamado *desarrollo*.

Para obtener intuitivamente el desarrollo de la superficie lateral de un *prisma finito*, hay que suponer que se corta por una arista lateral y por todas las aristas básicas, y luego la superficie lateral se extiende sobre un plano.

Es decir, se llama desarrollo de la superficie lateral de un prisma finito a la figura que se obtiene tomando sobre un plano, ordenadamente, paralelógramos que sean iguales a las caras laterales del prisma. Resulta así una suma de paralelógramos tales, que la distancia entre los lados extremos del primero y último es igual al perímetro de la sección recta.

Cuando el prisma es *recto,* se llama desarrollo de su superficie lateral a un rectángulo que tiene por altura la arista lateral o altura del prisma, y por base el perímetro de la base del mismo prisma.

El desarrollo de la superficie *total* de un prisma finito es una figura que se obtiene agregando al desarrollo de la superficie lateral dos polígonos iguales a las bases.

En resumen:

El desarrollo de la superficie lateral de un prisma recto es un rectángulo, cuya altura es igual a la arista lateral del prisma, y cuya base es igual al perímetro de la base del prisma.

9. Areas de prismas.

Area de la superficie de un prisma finito es la suma de las áreas de sus caras. Si se suman solo las caras laterales, se tiene el área *lateral;* y si es de todas, se tiene el área *total.*

Cuando se trata de un prisma *recto,* como sus caras laterales son rectángulos de la misma altura, que es la altura del prisma, para sumarlos bastará sumar sus bases, y tomar la misma altura, como hemos dicho para el desarrollo; luego el *área lateral de un prisma recto es igual al producto de su arista lateral, o altura, por el perímetro de la sección recta,* o sea de la base.

Y si se trata de un *prisma oblicuo,* como las caras late-

rales son paralelógramos de la misma base, que es la arista lateral, *h,* si llamamos a sus respectivas alturas, o sea a los lados de la sección recta, a_1, a_2... a_n, el área lateral será:

$$a_1.h+a_2.h+...+a_n.h=(a_1+a_2+...+a_n).h$$

es decir, el área lateral de un prisma oblicuo es igual al perímetro de la sección recta multiplicado por la arista lateral.

Para el área *total* se sumará a la lateral la de las bases.

En resumen:

El área lateral de un prisma recto es igual al perímetro de la base por la arista lateral, y el área lateral de un prisma oblicuo es igual al perímetro de la sección recta por la arista lateral.

10. Paralelepípedos.

Ya sabes que las caras laterales de un prisma son siempre paralelógramos, pero si también lo fueran las bases, todas sus caras serán paralelógramos y se llama entonces *paralelepípedo*.

Dibuja por ejemplo un paralelípedo como el de la figura 3.ª.

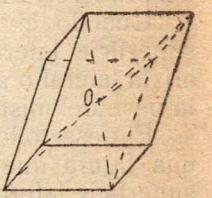


Fig. 3.ª

En resumen:

Se llama paralelepípedo un prisma cuya superficie está formada por seis paralelógramos.

11. Elementos del paralelepípedo.

Dos caras de un paralelepípedo que no tengan ninguna arista común se llaman *opuestas* y son iguales y paralelas, pues las aristas que hay en una son iguales y paralelas a las de la otra, luego los ángulos de la una tienen sus lados respectivamente paralelos y dirigidos en el mismo sentido que los de la otra y serán iguales, y sus planos paralelos.

También se llaman opuestos dos diedros o triedros que no tienen arista común, y los vértices de éstos se llaman también opuestos; así como se llaman opuestas dos aristas cuyos extremos son respectivamente vértices opuestos. Los triedros opuestos son iguales, porque tienen sus caras con los lados paralelos dirigidos en el sentido contrario, luego son iguales, y los respectivos diedros y triedros serán iguales.

Resulta de todo esto que un paralelepípedo se puede considerar como prisma de tres modos distintos, pues se pue-

den tomar como bases dos caras opuestas cualesquiera. Se podrán considerar también tres alturas, que son las correspondientes a cada par de caras opuestas.

El segmento que une cada dos vértices opuestos se llama *diagonal* del paralelepípedo. No se deben confundir con las diagonales de la cara.

Las cuatro diagonales que tiene todo paralelepípedo se encuentran en un mismo punto, que es punto medio de las cuatro. En efecto, cada dos aristas opuestas forman con dos diagonales de cara un paralelógramo, cuyas dos diagonales son diagonales del paralelepípedo, y ya sabemos que se cortan en su punto medio.

Traza, por ejemplo, las diagonales del paralelepípedo que has construído, las cuales se deberán cortar en un punto O.

En resumen:

A cada una de las caras, aristas, diedros y triedros de un paralelepípedo corresponde otro elemento opuesto que es igual al primero. Asímismo, a cada vértice corresponde un vértice opuesto, y el segmento que los une se llama diagonal del paralelepípedo.

12. Romboedro.

Ya sabes que cuando los cuatro lados de un paralelógramo son iguales se llama rombo, y si las seis caras de un paralelepípedo son rombos, éste se llama *romboedro*.

En resumen:

Se llama romboedro todo prisma cuya superficie está formada por seis rombos iguales.

13. Paralelepípedo rectángulo o rectoedro.

Un paralelepípedo cuyas caras son todas rectángulos se llama *paralelepípedo rectángulo,* o *rectoedro,* o todavía *ortoedro*. Será por tanto un prisma cuya superficie está formada por seis rectángulos. Dibújalo como en la figura 4.ª. Es prisma recto de tres modos distintos, y las tres aristas que concurren en cada vértice se llaman las tres *dimensiones*. Tiene de particular que *sus cuatro diagonales son iguales;* pues cada diagonal forma, con una diagonal de cara y una arista, un triángulo rectángulo, y como las

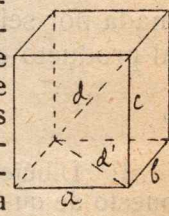


Fig. 4.ª

diagonales de una misma cara son iguales, se pueden formar triángulos rectángulos con las diagonales del rectoedro, que son todos iguales. O bien, porque cada dos aristas opuestas determinan un rectángulo.

Estos mismos triángulos rectángulos nos sirven para construir gráficamente la diagonal, cuando se conocen las tres dimensiones, o para calcularla en función de éstas.

Suponte que llamamos *a, b, c* las tres dimensiones, y llamamos d' a la diagonal de cara, correspondiente a la que tiene por dimensiones *a* y *b;* entonces la diagonal *d* del rectoedro, vendrá dada por una fórmula deducida de aplicar dos veces sucesivas el teorema de Pitágoras; hazlo:

$$d^2=d'^2+c^2 \text{ o sea } d^2=a^2+b^2+c^2.$$

En resumen:

Se llama paralelepípedo rectángulo o rectoedro a todo prisma cuya superficie está formada por seis rectángulos. El cuadrado de su diagonal es igual a la suma de los cuadrados de las tres aristas que concurren en un vértice, es decir, de sus tres dimensiones.

14. Cubo.

El paralelepípedo cuyas caras son todas cuadradas se llama *cubo*. Las tres dimensiones de él son iguales, y a su longitud se le llama longitud de la arista o simplemente *arista*. Si a esta arista la llamamos *a,* la diagonal *d* del cubo vendrá dada por una fórmula, que es caso particular de la obtenida en el párrafo anterior; escríbe, pues, la fórmula que expresa d^2 y la que se expresa *d:* $d^2=3a^2$ o bien $d=a.\sqrt{3}$

Más adelante estudiaremos esta figura con más detalle.

En resumen:

Se llama cubo el prisma cuya superficie está formada por seis cuadrados iguales. Su diagonal es igual al producto de la arista por la raíz cuadrada de tres.

Ejercicios

1. Dibújese un prisma exagonal regular; y en el supuesto de que la arista básica mida 2 cm. y la arista lateral 4 cm., hállese el desarrollo total de su superficie.

2. Calcúlese el área lateral y el área total del prisma considerado en el problema anterior.

3. Dibújese un rectoedro, y en el supuesto de que sus tres dimensiones midan 2 cm., 3 cm. y 4 cm., constrúyase el desarrollo total de su superficie, y calcúlese el área total, haciendo el cálculo por más de un procedimiento.

4. Calcúlese la arista que debe tener un cubo sabiendo que su diagonal tiene que medir 5 cm.

TEMA 8.º

Superficie piramidal y pirámide

1. Superficie piramidal.

La superficie del ángulo poliédrico se llama también *superficie piramidal.* Por lo tanto dibuja como en la figura 9.ª del tema 6.º, un polígono ABCDE. Toma un punto O exterior a su plano. Traza las semirectas que parten de O y pasan por los cinco punto A,B,C,D,E. También hay infinitas semirectas como esas que partiendo de O pasan por algún punto del *contorno* poligonal ABCDE, y esas infinitas semirectas forman la superficie de un ángulo poliédrico y también una superficie piramidal.

En resumen:

La superficie de un ángulo poliédrico se llama también superficie piramidal.

2. Secciones planas.

Si una superficie piramidal es cortada por un plano que encuentre a todas sus aristas, la intersección es el contorno de un polígono, siempre que el plano no pase por el vértice. Si pasa, lo más que puede cortarla es en generatrices enteras, o en el vértice solamente.

En particular, si cortamos una superficie piramidal por dos planos paralelos, que sin pasar por el vértice, cortan a todas sus aristas, los dos contornos de los polígonos secciones son *semejantes.*

En efecto, cada cara es cortada por los dos planos secantes según dos segmentos paralelos, que determinan en la cara dos triángulos semejantes, y aplicando sucesiva-

mente la proporcionalidad de lados a los diversos triángulos semejantes así formados, se verá que los dos polígonos tienen sus lados proporcionales. Además, sus ángulos son respectivamente iguales, por tener sus lados paralelos y dirigidos en el mismo sentido, luego esos polígonos son semejantes.

En resumen:

La sección de una superficie piramidal por un plano que corte a todas sus generatrices, sin pasar por el vértice, es el contorno de un polígono. Las secciones producidas por dos planos paralelos son semejantes.

3. Pirámide.

Dibuja un polígono ABCDE, como en la figura 1.ª. Toma un punto O exterior a su plano. Traza, no las semirectas, sino los *segmentos* que unen O con cada uno de los vértices de ese polígono. Hay infinitos segmentos como esos que unen O con algún punto del polígono, ya esté en el contorno, o ya sea interior a él; esos infinitos segmentos forman una figura que se llama *pirámide*. Ese polígono se llama *base* y el punto exterior al plano se llama *vértice* de la pirámide.

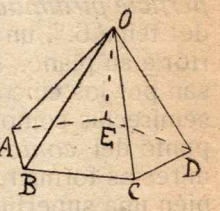


Fig. 1.ª

Según esta definición, viene a ser la pirámide aquella parte de un ángulo poliédrico que queda del mismo lado que su vertice, respecto de un plano que corte sus aristas.

Los segmentos que unen el vértice de la pirámide con los vértices del polígono base se llaman *aristas laterales*, y los lados de la base *aristas básicas*. El vértice de la pirámide forma, al unirlo con los vértices de la base, triángulos que se llaman *caras laterales* de la pirámide. Dos caras laterales consecutivas determinan un *diedro lateral*, y cada cara lateral determina con la base un *diedro básico*.

Altura de la pirámide es la distancia del vértice a la base.

En resumen:

Se llama pirámide la figura que forman todos los segmentos que unen cada punto de un polígono, llamado base, con un punto exterior a él, llamado vértice de la pirámide. La superficie de la pirámide estará forma-

da, por tanto, por un polígono llamado base, y por triángulos que tienen un vértice común, los cuales se llaman caras laterales.

4. Clasificación de las pirámides.

Las pirámides se clasifican por el número de lados de su base en pirámides *triangulares, cuadrangulares, pentagonales,* etc. Las triangulares son las más interesantes, y se llaman *tetraedros,* porque tienen cuatro caras, una básica, y las otras tres laterales; pero se puede considerar como pirámide de cuatro maneras, considerando como base una cualquiera de sus caras.

También se clasifican las pirámides en *regulares* e *irregulares*. Son regulares las que tienen por base un polígono regular, y su altura tiene por pie el centro de la base. Es claro que entonces todas las aristas laterales son iguales, como oblícuas cuyos pies se apartan igual de la perpendicular.

Por esto, en las pirámides regulares las caras laterales son *triángulos isósceles iguales,* cuyo vértice común es el vértice de la pirámide, y la altura que parte de este vértice, en cada triángulo, se llama *apotema de la pirámide.*

También son iguales en la pirámide regular todos los diedros laterales, así como todos los diedros básicos.

En resumen:

Las pirámides pueden ser triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc., según que el número de lados de la base sea 3, 4, 5, etc. También pueden ser regulares o irregulares, llamándose pirámide regular la que tiene por base un polígono regular, y las caras laterales son triángulos isósceles. Apotema de una pirámide regular es la altura de una cualquiera de sus caras laterales.

5. Tronco de pirámide.

Si la pirámide que has dibujado en la figura 1.ª la cortas por un plano paralelo a la base, esa pirámide queda dividida en dos partes. La que queda del mismo lado del vértice se llama *pirámide deficiente* y la otra, *tronco de pirá-*

mide. Dibuja, pues, un tronco de pirámide pentagonal, como el de la figura 2.ª

El tronco de pirámide tiene dos caras, llamadas *bases;* la una es la base de la pirámide primitiva, y la otra es el polígono sección de la pirámide por el plano secante. Las dos bases son polígonos semejantes, y la razón de semejanza es igual a la razón entre las aristas homólogas de la pirámide total y la deficiente, o lo que es igual a la razón entre las alturas de estas dos pirámides; ya que el plano determinado por una arista lateral y la altura de la pirámide total es cortado por el plano paralelo a la base en dos paralelas, que forman dos triángulos semejantes.

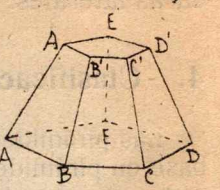


Fig. 2.ª

El tronco de pirámide tiene también otras caras, llamadas *caras laterales,* que son *trapecios,* cuyas bases son lados de las bases de tronco y los otros lados son *aristas laterales* del tronco. La distancia entre las bases del tronco se llama *altura* del mismo. Si por el punto medio trazamos un plano paralelo a las bases, la sección es un polígono semejante a esas bases, y que se llama *sección media del tronco.* Sus lados son paralelas medias de los trapecios laterales.

En resumen:

Se llama tronco de pirámide una porción de pirámide limitada por su base y un plano paralelo a ella. Dicha base de la pirámide y la sección producida por el plano secante se llaman bases del tronco, y se llama sección media la producida por un plano paralelo a las bases y equidistante de ellas.

6. Tronco de pirámide regular.

Cuando una pirámide regular es cortada por un plano paralelo a la base y comprendido entre ella y el vértice, el tronco que se obtiene se llama de pirámide regular. Tiene sus dos bases polígonos regulares y la recta que une los centros de las bases es perpendicular a sus planos.

Las caras laterales son trapecios isósceles iguales, y la altura de uno cualquiera de ellos se llama *apotema del tronco.*

Tiene también iguales todos los diedros laterales, así como todos los diedros cuyas aristas son todas las de una base, y los que tienen por aristas las de la otra base. Los

diedros básicos de una base son suplementarios de los de la otra.

En resumen:

En un tronco de pirámide regular las dos bases son polígonos regulares y las caras laterales son trapecios isósceles iguales. La altura de uno cualquiera de estos trapecios se llama apotema del tronco.

7. Desarrollo de la superficie de una pirámide.

Si sobre un plano construímos triángulos que sean ordenadamente iguales a las caras laterales de una pirámide, colocados de modo que tengan un vértice común, y cada dos consecutivos un lado común, se forma una figura que se llama *desarrollo* de la superficie lateral de la pirámide. Dicha figura sabemos que es un *sector poligonal,* cuyo contorno tiene el mismo perímetro que el de la base de la pirámide.

Cuando la pirámide es *regular,* el desarrollo es un sector de polígono regular, es decir, un sector poligonal que tiene todos sus lados iguales, sus ángulos iguales y sus vértices son equidistantes de un punto fijo que representa el vértice de la pirámide. Esa distancia, que es el radio del sector poligonal, es igual a la arista lateral de la pirámide. Y la apotema de la pirámide es igual a la apotema del sector poligonal.

Para obtener el *desarrollo total,* basta agregar al desarrollo de la superficie lateral el polígono de la base de la pirámide.

En resumen.

El desarrollo de la superficie lateral de una pirámide es un sector poligonal.

8. Desarrollo de la superficie de un tronco de pirámide.

El *desarrollo del tronco de pirámide* se construye lo mismo; por tanto, para desarrollar la superficie lateral se sumarán los trapecios que la constituyen, teniendo en cuenta que los lados no básicos de todos ellos tendrán que pasar por un mismo punto, que es el que representa el vértice de la

pirámide. Así resulta una figura que es diferencia entre el sector poligonal, desarrollo de la superficie lateral de la pirámide total, y el sector del desarrollo de la superficie lateral de la pirámide deficiente.

El *desarrollo total* se hallará agregando las dos bases.

En resumen:

El desarrollo de la superficie de un tronco de pirámide es una superficie que es diferencia entre dos sectores poligonales del mismo vértice y de contornos semejantes.

9. Area lateral de una pirámide regular.

Como la superficie lateral de una pirámide regular está formada por triángulos isósceles iguales, y el área de uno de ellos es igual a la mitad de la base por la altura, o sea, la apotema de la pirámide, resulta que si llamamos *b* la arista básica, llamamos *a*, la apotema de la pirámide, y llamamos *n* el número de lados se tendrá:

Area lateral de la pirámide regular $=\frac{1}{2}b.a.n=\frac{1}{2}(b.n).a=$ Semiperímetro$\times$apotema.

En resumen:

El área lateral de una pirámide regular es igual al semiperímetro de la base por la apotema de la pirámide.

10. Area lateral del tronco de pirámide regular.

La superficie lateral del tronco de pirámide regular está formada por trapecios iguales, y como el área de un trapecio es igual a la semisuma de las bases por la altura, que es la apotema del tronco, o bien igual a la paralela media por la altura, resulta que llamando *B* y *b* las aristas de las bases del tronco, llamando *a*, la apotema del tronco, llamando *n* el número de lados de la base, y llamando *m* la base media de un trapecio lateral, se tendrá:

Area lateral del tronco de pirámide regular $=\frac{1}{2}(B+b).a.n=$ $\frac{1}{2}(B.n+b.n).a=$semisuma de los perímetros de las bases$\times$ apotema$=m.a.n=(m.n).a=$perímetro de la sección media $\times$apotema.

En resumen:

El área lateral del tronco de pirámide regular es igual a la semisuma de los perímetros de las bases por la apotema; o bien: al perímetro de la sección media por la apotema del tronco.

11. Relación entre las áreas de las bases del tronco.

Hemos visto que las bases del tronco son polígonos regulares, cuya razón de semejanza es igual a la razón entre las alturas de la pirámide total y la deficiente. Y como la razón entre las áreas de dos polígonos semejantes es igual *al cuadrado* de la razón de semejanza, resultará que la razón entre las áreas de las bases de un tronco de pirámide es igual al cuadrado de la razón entre las alturas de las pirámides total y deficiente.

En resumen:

Las áreas de las bases de un tronco son proporcionales a los cuadrados de las alturas de las pirámides total y deficiente.

12. Construcción y cálculo de los elementos de una pirámide o tronco de pirámide regular.

Cuando de una pirámide regular se dan el número de caras laterales y dos elementos que basten para determinarla, como por ejemplo las aristas básica y lateral, se pueden construir sobre un plano, o calcular, los demás elementos, incluso las secciones normales de sus diedros básico y lateral. Análogamente decimos para el tronco. En particular, la sección normal de un diedro lateral puede formar con una diagonal básica un triángulo isósceles que se sabe construir o calcular.

En resumen:

Para construir o calcular los elementos de una pirámide regular basta conocer el número de caras laterales y dos elementos, tales como las aristas básica y lateral.

Ejercicios

1. Dibújese una pirámide regular de base cuadrada, y en el caso en que la arista básica mida 40 m. y la arista lateral 50 m., constrúyase, a la escala de 1:1000, el desarrollo de su superficie total.

2. Calcúlese el área total de esa pirámide cuyo desarrollo se ha dibujado.

3. Constrúyanse gráficamente las secciones normales de los diedros básico y lateral de dicha pirámide, y calcúlese la amplitud de esos diedros, utilizando las tablas trigonométricas.

4. Dibújese el desarrollo y calcúlese el área de la superficie total del tronco que resulta cortando la misma pirámide por un plano paralelo a la base y que dista de esa base igual que del vértice.

TEMA 9.º

Poliedros

1. El tetraedro.

Ya conocemos el tetraedro como pirámide triangular. Es figura fundamental, que representa en las figuras de tercera categoría, análogo papel al que representa el triángulo en las figuras planas, por lo cual lo definiremos y estudiaremos en particular.

Traza cuatro puntos A, B, C y D, que supondremos que no estén en un plano; no puede haber tres de ellos en línea recta, pues esa recta y el cuarto punto determinarían un plano que contenía a los cuatro; por tanto, tres cualesquiera de ellos son vértices de un triángulo, y la figura formada por los segmentos que unen el cuarto punto a cada uno de los puntos del triángulo determinado por los otros tres, es lo que se llama *tetraedro*. Constrúyelo como en la figura 1.ª

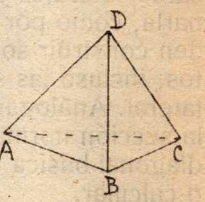


Fig. 1.ª

El nombre obedece a que tiene cuatro caras, que son los cuatro triángulos que se forman combinando esos cuatro puntos de tres en tres. Cada vértice se dice *opuesto* a la cara determinada por los otros tres.

Las aristas del tetraedro son seis. Cada una es cortada por cuatro de las otras, pero la quinta se *cruza* con ella y se llama *opuesta*. Cada dos caras que concurren en una arista determinan un *diedro*, y las tres caras que concurren en cada vértice determinan un *triedro*.

En el tetraedro hay puntos, rectas y planos notables, análogamente que en el triángulo, pero en su estudio detallado no podemos entrar. Mencionaremos las *medianas*, que son rectas que unen cada vértice con el baricentro de la cara opuesta; las *alturas*, que son las perpendiculares desde cada vértice a la cara opuesta, y limitadas en el vértice y la cara; las *bisectrices interiores* que son las intersecciones de los tres semiplanos bisectores de los diedros de cada triedro; y por fin las perpendiculares a las caras en el circuncentro o centro de la circunferencia circunscrita.

En resumen:

Toda pirámide triangular se llama tetraedro, porque su superficie está formada por cuatro caras, que son triángulos. Tendrá cuatro vértices y seis aristas y además hay puntos y rectas notables que tienen gran analogía con los del triángulo.

2. Poliedros.

Las pirámides y los prismas tienen su superficie formada por polígonos planos, que como sabes se llaman *caras*, y por eso esas figuras se las llama *poliedros*. Mas en general, un poliedro es toda porción del espacio limitada por una superficie que está formada por polígonos planos, que se llaman caras del poliedro.

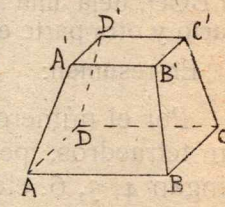


Fig. 2.ª

Dibuja, por ejemplo, un tronco de pirámide cuadrangular como en la figura 2.ª Esa figura será un poliedro, porque su superficie está formada por cuadriláteros, o sea, por polígonos de cuatro lados. También es poliedro el tetraedro.

Los lados y vértices de las caras de un poliedro se llaman *aristas*, y *vértices* del mismo poliedro.

En resumen:

Se llama poliedro toda porción del espacio limitada por polígonos planos, que se llaman caras.

3. Clasificación de los poliedros

Los poliedros se clasifican por el número de caras en *tetraedros, pentaedros, exaedros,* etc., según que ese número sea 4, 5, 6, etc. También se clasifican en *regulares* e *irregulares*. Para que un poliedro se considere regular, es necesario que tenga todas sus caras polígonos regulares e iguales, y que sus ángulos diedros sean iguales, así como sus ángulos poliedros. En este sentido los prismas y las pirámides regulares, que son regulares como tales prismas o pirámides, no se consideran, salvo alguna excepción, como poliedros regulares. Los poliedros pueden ser también *convexos* o *cóncavos*. El poliedro dibujado en la figura 2.ª es convexo, porque los planos que contienen a cada una de sus caras dejan todo el poliedro en una misma región del espacio. Dibuja, en cambio, una pirámide triangular ABCD como en la figura 3.ª El plano BCD deja a esa pirámide en una región del espacio, que en la figura está a la izquierda. Toma entonces un punto E que esté en la otra región, o sea a la derecha, y que esté respecto del plano ABC en distinta región que el punto D. Une dicho punto E con los vértices A, B, C. Se te forma así un poliedro de seis caras o exaedro, que no es convexo, sino *cóncavo,* porque el plano que contiene alguna de sus caras, tal como el BCD, deja una parte del poliedro en una región del espacio y otra parte en otra región.

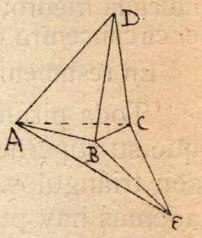


Fig. 3.ª

En resumen:

Por el número de caras los poliedros se clasifican en tetraedros, pentaedros, exaedros, etc., según que tengan 4, 5, 6, etc. caras. Por su forma se clasifican en regulares e irregulares, y también en convexos y cóncavos. Poliedros regulares son los que tienen todas sus caras polígonos regulares iguales, y los que no son regulares se llaman irregulares. Poliedros convexos son los que quedan siempre de una misma región respecto de los planos que contienen a cada una de sus caras. Los que no son convexos se llaman cóncavos.

4. Teorema de Euler.

Si nos fijamos en un tetraedro veremos que tiene cuatro caras, cuatro vértices y seis aristas, por lo cual el número de caras mas el de vértices menos el de aristas, es igual a dos. Esto es general a todos los poliedros convexos, constituyendo el *teorema de Euler,* que dice que en tales poliedros, entre el número de caras C, el número de vértices V, y el número de aristas A, existe la relación: $C+V-A=2$.

En efecto, dado un poliedro convexo, llamemos x a la expresión $C+V-A$, y veamos que x vale 2. Para ello supongamos que de la superficie de ese poliedro separamos una cara; nos quedará una superficie poliédrica abierta que tiene el mismo número de vértices y aristas que la del poliedro, pero una cara menos.

Por lo cual, llamando C_1 al número de caras; V_1 al de vértices y A_1 al de aristas de tal superficie será:

$$C_1+V_1-A_1=x-1$$

Si en la superficie poliédrica abierta suprimimos otra cara, que tenga alguna arista no perteneciente a las demás caras, y seguimos haciendo lo mismo con todas las demás superficies que nos van resultando, hasta llegar a tener una cara única, el número de aristas disminuye cada vez en una unidad más que el número de vértices, por lo cual se conserva constante la expresión:

$$C_i+V_i-A_i=x-1$$

pero al llegar a una cara única de n lados esta expresión vale:

$$1+n-n=1=x-1, \quad \text{de donde} \quad x=2$$

Ya se comprende que el razonamiento es válido para otras muchas clases de poliedros además de los convexos, llamándose algunas veces poliedros Eulerianos a los que verifican el teorema de Euler.

En resumen:

En todo poliedro convexo se verifica que el número de caras, más el de vértices, menos el de aristas es igual a dos.

5. Poliedros regulares que son posibles.

Generalizando el concepto de poliedro se estudian algunos que se llaman poliedros regulares *estrellados,* como se estudian los polígonos regulares estrellados, pero nosotros nos referimos sólo a los convexos.

Veamos ahora con qué polígonos regulares se puede formar la superficie de un poliedro regular convexo, superficie que por definición deberá estar formada por polígonos todos regulares e iguales y por consiguiente, todos del mismo número de lados. Para ello debemos observar que siendo el poliedro convexo, sus ángulos poliédricos respectivos tendrán que ser también convexos, y por consiguiente la suma de los ángulos que concurren en cada vértice tendrá que ser *menor que cuatro rectos*, porque ya sabemos que la suma de las caras de un ángulo poliédrico convexo tiene que ser menor que cuatro rectos.

El *triángulo equilátero* tiene cada ángulo igual a 60° o sea a $\frac{2}{3}$ de recto. Según eso, multiplica $\frac{2}{3}$ por 3, 4, 5 y por 6:

$$\frac{2}{3} \times 3 = 2;\ \frac{2}{3} \times 4 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3};\ \frac{2}{3} \times 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3};$$

$$\frac{2}{3} \times 6 = 4$$

y esto nos dice que la suma de las caras puede ser menor que cuatro rectos aunque en un ángulo poliédrico haya 3 ó 4 ó 5 ángulos de triángulo equilátero, pero no puede haber seis o más.

De manera que por este motivo *pueden existir hasta tres especies de poliedros regulares cuyas caras sean triángulos equiláteros*. Veremos que existen.

El *cuadrado* tiene sus ángulos de un recto, por lo cual la condición de la suma de las caras es satisfecha si se reunen tres de tales ángulos en un vértice, pero no se pueden reunir cuatro o más. *Es posible pues, otro poliedro cuyas caras sean cuadrados*. Veremos que existe.

El *pentágono regular* tiene su ángulo igual a $\frac{6}{5}$ de recto; multiplica esta fracción por 3 y por 4

$$\frac{6}{5} \times 3 = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5};\ \frac{6}{5} \times 4 = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}.$$

luego *también puede haber un poliedro regular formado con pentágonos*, como veremos que existe.

Pero ya el *exágono regular*, cuyo ángulo es de $\frac{4}{5}$ de recto, o los *polígonos regulares de mayor de número lados no pueden ser caras de poliedros regulares convexos*.

Por tanto, a lo más hay *cinco especies* de poliedros regulares.

En resumen:

Solo puede haber cinco especies de poliedros regulares convexos. En tres de ellos la superficie estará formada por triángulos equiláteros, de los cuales podrán concurrir en cada vértice 3, 4 ó 5; y en los otros dos la superficie estará formada por cuadrados o por pentágonos regulares, de los cuales no podrán concurrir en cada vértice más de tres.

6. El tetraedro regular.

Existencia del tetraedro regular.

Para que exista un poliedro regular, cuyas caras sean triángulos equiláteros y cuyos anguloides sean triedros, es necesario que además del teorema de Euler, que se expresa: $C + V - A = 2$, se verifiquen estas otras dos relaciones:

$$3C = 2A\,; \quad 3V = 2A$$

puesto que teniendo cada cara tres lados, el número total de aristas será 3.C, dividido por el número de caras a que pertenece cada arista, que es 2. Y lo mismo decimos de los vértices.

Esas tres relaciones forman un sistema muy sencillo de tres ecuaciones con tres incógnitas. Resuélvelo y obtendrás:

$$A = 6\,; \; C = 4\,; \; V = 4$$

Por tanto, si existe ese poliedro deberá tener cuatro caras, por lo cual le llamaremos *tetraedro,* y 4 vértices, y 6 aristas.

Y en efecto, para comprobar su existencia, traza un triángulo equilátero ABC, como en la figura 4.ª; traza por su centro M la perpendicular a su plano, y toma en ella un punto D, tal que sea DC=BC; entonces, como el punto M equidista de los A, B y C, también el punto D equidistará, puesto que las tres oblícuas, DA, DB, DC tienen sus pies a la misma distancia del pie de la perpendicular. De aquí resulta que el tetraedro DABC tendrá por caras triángulos equiláteros iguales, y sus anguloides serán triedos regulares e iguales, pues a caras iguales se oponen diedros iguales y triedros que tengan sus caras respectivamente iguales tienen sus ángulos diedros respectivamente iguales, y ellos mismos son iguales. Se ha formado, por tanto, un *tetraedro regular.*

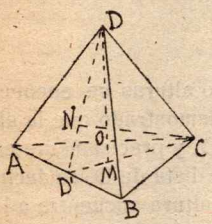


Fig. 4.ª

Construcción y cálculo de sus elementos.

La construcción indicada es en el espacio, pero se pueden facilmente construir y calcular todos sus elementos en el plano. Desde luego, dada la arista, se sabe construir una cara. Si nos fijamos luego en un triángulo, tal como el DCD' de la misma figura 4.ª, que es isósceles, y tiene por base una arista CD, y por vértice el punto medio de la arista opuesta, lo podremos construir, pues se conocen la base, que es la arista, y los otros dos lados, que son las alturas de las caras del tetraedro. Suponte, por ejemplo, que la arista es un segmento dado a (figura 5.ª). Construye un triángulo ADC, de lado *a*, que será una cara. Traza la altura AH, y con ella traza el triángulo isósceles CDD' cuyos lados no básicos son iguales a esa altura. En este triángulo aparecen los elementos principales del tedraedro: el ángulo CD'D, que es sección normal del diedro; la altura DM o CN, que es la altura del tetraedro; el punto O en que se cortan esas alturas representa el centro del tetraedro, y los segmentos OD y OM representan, respectivamente, las distancias desde el centro a cualquier vértice y a cualquier cara.

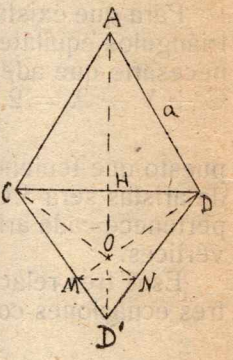


Fig. 5.ª

Puede observarse que es OD = 3.OM, porque ya recordarás que el centro M de un triángulo equilátero es baricentro y por tanto divide a la altura o mediana CD' en dos partes tales que la mayor CM es doble que la menor D'M, por lo cual esta D'M será la tercera parte de D'C y entonces comparando los triángulos semejantes MND', CDD' se tendrá:

$$\frac{D'M}{D'C} = \frac{1}{3} = \frac{MN}{CD} = \frac{OM}{OD}$$

Esto demuestra que, efectivamente, las cuatro alturas se encuentran en un mismo punto, pues igual que hemos demostrado que la altura que parte de C encuentra a la que parte de D, y precisamente en el punto que dista de M la tercera parte de lo que dista de D, es decir, en el punto O, se demuestra que cualquier otra altura encuentra a la que parte de D en ese punto O. Y la figura muestra también inmediatamente que ese punto O equidista de los vértices, y también de las caras, puesto que es OD=OC; OM=ON.

Los mismos triángulos sirven para el cálculo de elementos.

Halla por ejemplo en la figura 4.ª la altura DD' de una cara, en fun-

ción de la arista *a*, altura que es igual que el segmento AH, de la figura 5.ª:

$$\overline{AH}^2=\overline{DD'}^2=a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{3}{4}a^2 \longrightarrow AH=DD'=D'C=a\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aplica este resultado en el cálculo de la altura DM del tetraedro:

$$DM=\sqrt{AH^2-\left(\frac{AH}{3}\right)^2}=a\times\frac{\sqrt{6}}{3}$$

Aplica los dos resultados al cálculo de la tangente del ángulo rectilíneo correspondiente al diedro del tetraedro, o sea la tangente de este diedro:

$$\text{tg } CD'D=\frac{DM}{MD'}=\frac{a\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a}=2\sqrt{2}$$

Como ves, este ángulo diedro es independiente de la arista, lo cual te demuestra que es igual en todos los tetraedros regulares.

El desarrollo de la superficie.

El desarrollo de la superficie es un triángulo equilátero descompuesto en otros cuatro, que son las caras del tetraedro. Constrúyelo, supuesto sea conocida la arista.

En resumen:

El tetraedro regular es un poliedro cuya superficie está formada por cuatro triángulos equiláteros iguales, y tiene cuatro vértices y seis aristas. Sus principales elementos se pueden construir y calcular fácilmente trazando el triángulo isósceles formado por una arista y las dos perpendiculares a la arista opuesta, trazadas desde los extremos de la primera.

7. El exaedro o cubo.

Ya has visto que podrían tal vez formarse poliedros regulares convexos, cuyas caras fuesen cuadrados, y tales que en cada vértice concurran tres aristas. Escribe, según eso, las condiciones que deben cumplir el número de caras C, el número de vértices V, y el número de aristas A:

$$C+V-A=2;\quad 4C=2A;\quad 3V=2A;$$

Resuelve este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, y obtendrás la siguiente solución: A=12; C=6; V=8;

y por tanto el poliedro debe ser un *exaedro regular,* por tener 6 caras.

Este poliedro existe realmente, pues construyendo un prisma recto que tenga por base un cuadrado, y cuya altura sea igual al lado de ese cuadrado, resultará evidentemente un poliedro regular que lo llamamos cubo. Constrúyelo como en la figura 6.ª

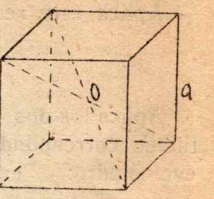


Fig. 6.ª

Dos aristas paralelas que no pertenezcan a la misma cara, determinan con dos diagonales de cara un rectángulo y las diagonales de él son diagonales del cubo, por lo cual se encuentran, y precisamente en su punto medio. Como se verifica ésto para cualquier par de diagonales, resulta que las diagonales del cubo se encuentran en un punto que equidista de los vértices, equidista de las caras y equidista de las aristas, por lo cual se le llama *centro del cubo.*

Construcción y cálculo de elementos.

La construcción y cálculo de elementos es inmediata. Construída la cara y trazada la diagonal, podremos trazar luego el rectángulo cuyos lados son dos aristas y dos diagonales de cara, y en él está la diagonal del cubo, y las distancias desde el centro a los vértices, a las caras y a las aristas. Y si llamamos *d,* a la diagonal de cara y D, a la del cubo, ya calculamos antes el valor de *d,* y el valor de *D,* en función de la arista *a,* del cubo. Exprésalo nuevamente:

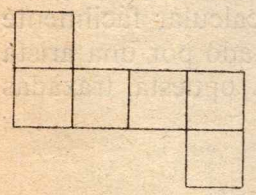


Fig. 7.ª

$$d^2=2a^2;\quad D=a\times\sqrt{3}$$

El *desarrollo* se compone de seis cuadrados dispuestos en la forma que indica la figura 7.ª. Constrúyelo. Recortando un cartón en la forma que indica este desarrollo, puede servir para construir el cubo, plegando luego esos cuadros.

En resumen:

El exaedro regular o cubo es un poliedro cuya superficie está formado por seis cuadrados iguales. Tiene ocho vértices y doce aristas. Sus principales elementos se puede construir y calcular fácilmente por triángulos rectilíneos.

8. El octaedro regular.

Existencia del octaedro regular.

También hemos visto que existen, tal vez, poliedros regulares cuya superficie estuviera formada por triángulos equiláteros, de tal modo, que en cada vértice concurran cuatro aristas. Escribe las condiciones de deberán satisfacer el número C de caras, el número V de vértices, y el número A de aristas: $C + V - A = 2$; $3C = 2A$; $4V = 2A$. Resuelve este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, y obtendrás la siguiente solución: $A = 12$; $C = 8$; $V = 6$; el poliedro será pues un *octaedro,* por tener ocho caras.

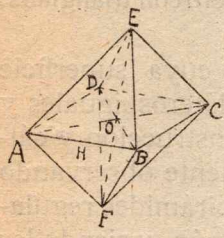


Fig. 8.ª

Para ver que realmente existe construye un cuadrado ABCD situado en un plano casi horizontal, como en la figura 8.ª; y por su centro O, traza una perpendicular a su plano, en la cual toma a partir de O, en uno y otro sentido, dos segmentos iguales a la mitad de la diagonal del cuadrado, es decir:

$$OE = OF = OA$$

Entonces el punto E equidista de los vértices del cuadrado y también el punto F, por ser esas distancias oblícuas que se apartan igual de la perpendicular; pero además esas oblícuas son iguales a los lados del cuadrado, pues son iguales, por ejemplo, los triángulos AEO = ABO que tienen iguales los catetos.

Une pues los E y F con los vértices del cuadrado y obtendrás un poliedro, integrado por dos pirámides de base cuadrada, el cual es regular. Y en efecto, todas las caras son triángulos equiláteros, por tener los lados iguales; los diedros son también todos iguales, pues sus rectilíneos se pueden trazar uniendo el punto medio de cada arista con los vértices opuestos a ellas en las respectivas caras, y así el diedro correspondiente a la arista AB tendrá por sección normal o rectilíneo correspondiente el ángulo EHF, perteneciente al triángulo EHF, que es igual a los triángulos análogos que se pueden considerar con los demás diedros.

Construcción y cálculo de elementos.

Para construir y calcular los elementos, dada por ejemplo, la arista, construye una cara, que será un triángulo

equilátero; después construye un cuadrado cuyo lado sea la arista, y la diagonal será la del poliedro; y por fin, construye el triángulo a que nos hemos referido para el ángulo diedro, es decir, un triángulo isósceles, cuya base sea la diagonal y cuyos otros lados sean iguales a la altura de una cara. En esas tres figuras construídas sobre un plano, están los elementos principales del octaedro regular. Es inmediato ver que el punto de concurso de las diagonales equidista de los vertices, de las caras y de las aristas, y se llama *centro*.

Para el *cálculo* sirven los mismos triángulos; y así, expresa la diagonal *d* en función de la arista *a:*

$$d = \sqrt{a^2 + a^2} = a.\sqrt{2}.$$

El *desarrollo* es parecido al del cubo, pero con triángulos.

En resumen:

El octaedro regular es un poliedro cuya superficie esté formada por ocho triángulos equiláteros iguales y tiene seis vértices y doce aristas. La construcción y cálculo de sus elementos se realiza fácilmente observando que el octaedro está formado por dos pirámides regulares de base cuadrada, con esa base común, y siendo las distancias entre los vértices iguales a la diagonal de esa base.

9. El dodecaedro regular.

Idea sobre la existencia del dodecaedro regular.

Vimos también antes que existía tal vez un poliedro regular cuya superficie está formada por pentágonos regulares iguales, de tal manera que en cada vértice del poliedro concurran tres de sus aristas. Escribe las condiciones que deben reunir el número C de caras, el número V de vértices y el número A de aristas: $C + V - A = 2$; $5C = 2A$; $3V = 2A$.

Resuelve este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, y obtendrás esta solución: $A = 30$; $C = 12$; $V = 20$.

El poliedro será, pues, un *dodecaedro*. No nos detendremos en demostrar que realmente existe. Solamente, se representa en la figura 9.ª.

Construcción y cálculos de elementos.

Los elementos del dodecaedro están representados en la sección producida por un plano que sea perpendicular a una arista en su punto

medio. A las dos caras que tienen esa arista común las cortará en dos segmentos, cuyo ángulo es la sección normal del diedro, que sabremos construirla considerando la pirámide determinada por un vértice y los tres más próximos. Una cara lateral de esta pirámide será el triángulo ABC de la figura 10.ª. Constrúyela, suponiendo que se conoce la arista AB y observando que el ángulo en B tiene que ser igual al ángulo de un pentágono regular, que podrás construir aparte en la forma que ya sabes.

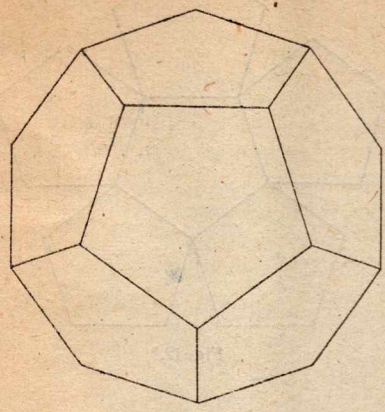


Fig. 9.ª

El plano secante, que lo suponemos trazado por el punto medio de la arista AB, perpendicularmente a ella, cortará a la cara ABC en el segmento XY, y a la cara contígua en otro segmento igual a él, y cortará a la base de la pirámide, o sea al triángulo ACH en el segmento YZ, paralelo al CH. Esto te permite construir el triángulo XYZ (figura 11.ª) cuyo ángulo en X es la sección normal del diedro. Prolongando los lados de este triángulo se encontrarán en las prolongaciones los puntos M y N que representan los centros de las caras del poliedro, que tienen AB por arista común y los vértices D y D' opuestos a esa arista en cada una de las caras. Las perpendiculares M y N a esos lados determinan un punto O, que representa el centro del poliedro, pues se ve fácilmente que equidista de las caras, vértices y aristas, siendo esas distancias:

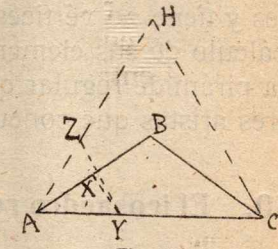


Fig. 10.ª

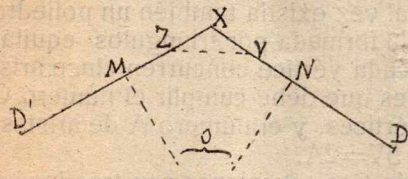


Fig. 11.ª

$$OM = ON\ ;\ OD = OD'\ ;\ y\ OX$$

Para el cálculo se utilizan los mismos triángulos.

Desarrollo.

Dibuja una cara, y sobre cada uno de sus lados di-

buja otra cara y tendrás el desarrollo de media superficie. (Figura 12).

Ya se comprende que si colocamos las caras de alrededor de manera que formen con la del centro el ángulo diedro antes hallado, se obtendrá media superficie, y con otra media coloçada invertida se obtendrá la superficie entera y tendremos construído el poliedro en el espacio. En la práctica se hace así con cartulina.

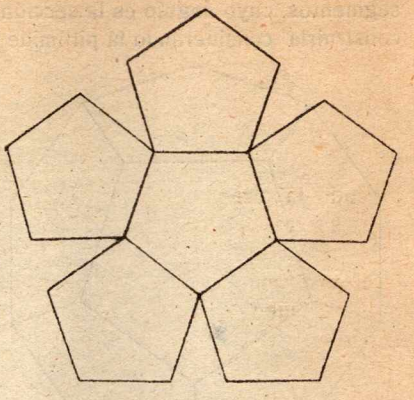


Fig. 12.ª

En resumen:

El dodecaedro regular es un poliedro cuya superficie está formada por doce pentágonos regulares iguales y tiene 20 vértices y 30 aristas. La construcción y cálculo de sus elementos se puede hacer considerando la pirámide regular que tiene por aristas laterales las tres aristas que concurren en un vértice del dodecaedro.

10. El icosaedro regular.

Idea de la existencia del icosaedro regular.

Vimos finalmente que tal vez existía también un poliedro regular, cuya superficíe está formada por triángulos equiláteros, de tal modo que en cada vértice concurren cinco aristas. Escribe las condiciones que debe cumplir el número C de caras, el número V de vértices, y el número A de aristas: $C+V-A=2$; $3C=2A$; $5V=2A$.

Resuelve este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas y obtendrás la siguiente solución:

$$A=30; \quad C=20; \quad V=12.$$

Será, pues, un poliedro que tendrá 20 caras, o sea un *icosaedro*. Se demuestra que realmente existe, aunque la demostración no la detallamos en obsequio a la brevedad. Nos limitamos a representar el poliedro en la figura 13.

Construcción y cálculos de sus elementos.

Los elementos del icosaedro están representados en una sección producida por un plano que sea perpendicular a una arista en su punto medio. A las dos caras que tienen esa arista común las cortará en dos segmentos, cuyo ángulo es la *sección normal del diedro,* que sabremos construirla considerando la pirámide determinada por un vértice y los cinco más próximos. Cualquier plano perpendicular a una arista lateral en su punto medio, corta a las caras laterales que tienen común esa arista según dos segmentos que son alturas de los triángulos equiláteros que forman esas caras, y cortará a la base según un segmento que es diagonal del pentágono base de la pirámide.

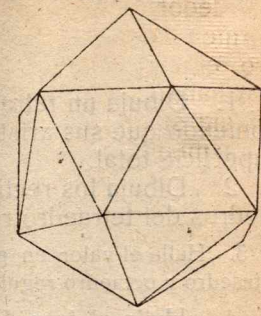


Fig. 13.

Así pues, empieza por construir un triángulo equilátero que sea una cara del poliedro, y traza una altura. Con el mismo lado del triángulo, construye un pentágono regular, y trazando una diagonal construye un triángulo isósceles cuya base sea esa diagonal y cuyos otros dos lados sean iguales a la altura del triángulo equilátero, cara del poliedro.

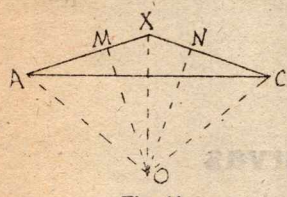


Fig. 14.

En el triángulo isósceles así construído, tal como el XAC de la figura 14, el ángulo en el vértice X será la sección normal del diedro, los puntos M y N que distan de X la mitad que de los otros vértices, representan los centros de las caras, y las perpendiculares en ellos a las rectas XA, XC determinan un punto O, que representa el llamado centro del poliedro, pues se ve fácilmente que equidista de las caras, vértices y aristas, siendo esas distancias, respectivamente: OM=ON; OA=OC; y OX. Para el *cálculo* se utilizan los mismos triángulos.

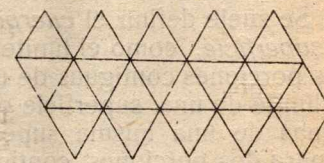


Fig. 15.

El *desarrollo* está formado por 20 triángulos equiláteros dispuestos como indica la figura 15. Constrúyelo.

En resumen:

El icosaedro regular es un poliedro cuya superficie está formada por 20 triángulos equiláteros iguales, y

tiene 12 vértices y 30 aristas. La construcción y cálculo de sus elementos se puede realizar considerando la pirámide regular cuyas aristas laterales son las cinco aristas que concurren en un vértice del icosaedro.

Ejercicios

1. Dibuja un tetraedro, que supondremos regular, y suponiendo que sus aristas midan 2 cm., calcula el área de su superficie total.
2. Dibuja los rectilíneos correspondientes a los ángulos diedros del tetraedro regular y del octaedro regular.
3. Halla el valor en grados de los dos ángulos diedros de dichos tetraedro y octaedro regular, utilizando las tablas trigonométricas.
4. Halla el área de un dodecaedro regular, cuya arista mida 2 cm., utilizando las tablas trigonométricas para calcular la longitud de la apotema de una cara.

TEMA 10.º

Superficies curvas

1. Nota sobre los conceptos de línea, superficie y cuerpo.

Se suele definir el *cuerpo* como una porción del espacio; la *superficie,* como el límite de un cuerpo, o lo que separa dos porciones contiguas de un mismo cuerpo; la *línea,* como el límite de una superficie o lo que separa dos partes contiguas de una misma superficie, y el *punto,* como lo que separa dos porciones contiguas de una misma línea. Hace mucho tiempo que se ha puesto de manifiesto lo defectuoso de estas definiciones. Y así, los puntos, las líneas y las superficies son también partes del espacio, y sin embargo no son cuerpos.

Otras veces se recurre al movimiento, y se define la *línea* como la figura formada por las diversas posiciones que va ocupando un punto que se mueve en el espacio; la *superficie* como las posiciones de una línea que se mueve, cambiando o no de forma al moverse; y el *cuerpo,* como las posiciones de una superficie que se mueve.

Estas definiciones tienen el defecto de referirse al movimiento, noción muy compleja, que para introducirla debidamente en Geometría hay que fundarla en conceptos que se pretenden definir por medio de él. Además queda muy imprecisa la frase «cambiar de forma».

No pretendemos definir aquí rigurosamente esos conceptos de línea, superficie y cuerpo, sino que hablaremos de ellos como si fuesen *conceptos primitivos,* que se admiten por tanto sin definición.

En resumen:

Los conceptos de línea, superficie y cuerpo los admitiremos como conceptos primitivos.

2. Tangentes y planos tangentes.

Tangente a una línea.

Traza una línea que supondremos representa a otra línea del espacio, que puede ser plana o alabeada. Toma en ella dos puntos A y B (figura 1.ª) La recta AB es una *secante* de esa curva. Refiriéndonos a conceptos intuitivos, supongamos que el punto B se acerca al A indefinidamente. La secante AB irá girando, en general, alrededor del punto A, y la recta límite de las diversas posiciones que va ocupando la secante, o sea la recta AT, se llama *tangente.* Un punto de la curva se llama *ordinario,* cuando no tiene más que una tangente en él la curva. Hay *puntos* en los cuales la línea tiene más de una tangente y se llaman *singulares.*

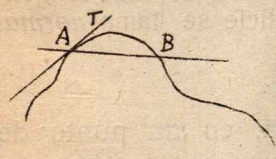


Fig. 1.ª

Plano tangente a una superficie.

Refiriéndonos también a conceptos intuitivos, supongamos una superficie definida por el movimiento de una línea, llamada *generatriz.* La tangente a cualquier línea trazada en la superficie se llama *tangente a la superficie.*

Traza ahora un punto A, que supondremos representa un punto de la superficie, y dos líneas que pasan por él y están en la superficie. Toma otros dos puntos B y C, uno

en cada línea (figura 2.ª), por los cuales pasa la generatriz de la superficie en una de sus posiciones. Las tres secantes AB, AC, y BC están en un plano. Al ir moviéndose la generatriz, tendiendo a pasar por A, los puntos B y C tienden a confundirse entre sí, y con el A, por lo cual dichas tres secantes tienden a confundirse con las tres tangentes trazadas por A, a las tres líneas AB, AC, y CB. Pero como esas tres secantes están constantemente en un plano, las tres tangentes deberán estar en otro plano, que es límite de las posiciones del anterior.

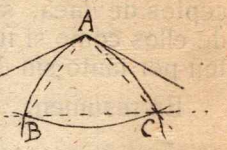


Fig. 2.ª

Con este razonamiento intuitivo se comprende que, en general, *en cada punto de una superficie todas sus tangentes están en un plano,* en el determinado por la tangente a la generatriz y por otra tangente cualquiera; y ese plano se llama *plano tangente a la superficie,* llamándose el punto *ordinario;* luego *se llama plano tangente a una superficie, en un punto ordinario de ella, al plano que contiene a todas las tangentes a la superficie, trazadas por ese punto.*

Hay puntos *singulares* en los cuales las tangentes a la superficie no están en un plano; por ejemplo, el vértice de una superficie piramidal. La perpendicular al plano tangente en un punto ordinario de la superficie se llama *normal* a ésta.

En resumen:

Se llama tangente a una línea, en un punto de ella, el límite de las posiciones de una secante que pasa por ese punto, y va girando alrededor de él, cuando el segundo punto de intersección tiende a confundirse con el primero.

Se llama tangente a una superficie, en un punto de ella, a toda recta que es tangente a cualquiera de las líneas que pasan por ese punto, y están en la superficie. En los puntos ordinarios de una superficie, todas las tangentes a ellas están en un plano, que se llama plano tangente a esa superficie.

3. Superficie cónica.

Traza un plano α, y toma un punto O exterior a él (figura

3.ª). Traza en el plano una línea. Todas las rectas que pasan por O y por algún punto de la línea forman una figura llamada *superficie cónica* de dos hojas; y la figura formada por todas las semirectas o rayos que parten de O y pasan por algún punto de la línea, forman una superficie cónica de una hoja.

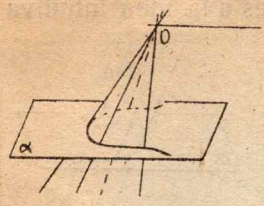


Fig. 3.ª

Por ejemplo, una superficie piramidal es una superficie cónica de una hoja, en la cual la línea plana es el contorno de un polígono.

El punto O se llama *vértice* de la superficie cónica. Las rectas o los rayos que la integran se llaman *generatrices*, y la línea plana, por cuyos puntos pasan las generatrices, se llama *directriz*. Estos nombres obedecen a la idea intuitiva de suponer la superficie cónica engendrada por una recta móvil, llamada generatriz, que se mueve de manera que pasa siempre por un punto fijo, que se llama vértice, y se apoya en una línea fija, llamada directriz.

Las tangentes a la directriz determinan con el vértice planos que se llaman *planos tangentes* a la superficie; y la recta que pasa por el vértice y por el punto de contacto de la tangente a la directriz se llama *generatriz de contacto* del respectivo plano tangente.

En resumen:

Se llama superficie cónica la figura formada por las rectas que pasan por un punto y cortan a una línea plana, cuyo plano no contiene a dicho punto. Esa línea plana se llama directriz; las rectas que definen la superficie se llaman generatrices de la misma, y el punto común a todas se llama vértice.

Si en vez de ser rectas son semirectas o rayos que parten del vértice, la superficie cónica se dice que es de una hoja.

4. Superficie cilíndrica.

Traza un plano α y traza una línea en él; todas las rectas paralelas entre sí, que cortan al plano en algún punto de la línea, forman una superficie cilíndrica (figura 4.ª). Traza algunas de esas rectas.

Las rectas que forman la superficie cilíndrica se llaman

generatrices, y la línea plana por cuyos puntos pasan se llama *directriz.* Obedecen estos nombres a la idea intuitiva según la cual la superficie cilíndrica se considera engendrada por una recta móvil, llamada generatriz, que se mueve de manera que todas sus posiciones son paralelas y se apoya constantemente en una línea llamada directriz.

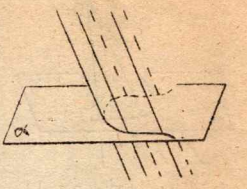


Fig. 4.ª

Toda tangente a la directriz, y la generatriz que pasa por el punto de contacto, determinan un plano, llamado *plano tangente a la superficie cilíndrica,* llamándose a dicha generatriz, que pasa por el punto de contacto de la tangente, *generatriz de contacto del plano tangente.*

Un ejemplo de superficie cilíndrica lo tenemos en la superficie prismática. En ella la directriz es un polígono, o mejor dicho, su contorno.

En particular, cuando la directriz de una superficie cónica o de una cilíndrica es línea de segundo orden, así se llaman aquéllas.

En resumen:

Se llama superficie cilíndrica la figura formada por todas las rectas que son paralelas entre sí y cortan a un plano en los puntos de una línea. Esta línea se llama directriz de la superficie cilíndrica, y las rectas que esta superficie definen se llaman generatrices de la misma.

5. Cilindro circular.

Si una superficie cilíndrica cuya generatriz es una circunferencia, se corta por un plano paralelo al plano de dicha circunferencia, la intersección es también otra circunferencia igual que la primera.

La figura formada por todos los segmentos que tienen sus extremos en los círculos definidos por esas circunferencias, y que son paralelos al segmento que une los centros, se llama *cilindro circular.*

Este cilindro está limitado, por tanto, por una superficie cilíndrica de directriz circular, y por dos círculos iguales y de planos paralelos, los cuales se llaman *bases del cilindro,* llamándose *superficie lateral* a lo que resta de la superficie del cilindro si se suprimen las bases.

En resumen:

Se llama cilindro circular el cuerpo limitado por una superficie cilíndrica de directriz circular, y por dos círculos iguales y de planos paralelos, llamados bases.

6. Superficies de revolución.

Hay superficies respecto de las cuales existe una recta llamada *eje,* que tiene esta propiedad: dado un punto cualquiera de la superficie, pertenecen también a ella todos los puntos situados en una circunferencia que pasa por el punto dado, que tenga su plano perpendicular al eje, y que su centro esté en el eje. A tales superficies se les llama de revolución, nombre que obedece a la idea intuitiva de considerarlas como engendradas por una línea que gira alrededor de una recta, llamada eje, verificando una revolución completa.

Dibuja, por ejemplo, una recta *m* y una curva CABD como en la figura 5.ª. Si supones que esa curva gira alrededor del eje hasta dar una vuelta completa, engendrará una superficie que se llama *superficie de revolución.* Indica en la misma figura las posiciones que ocupa la línea cuando haya girado 180° o media vuelta. De ésto se deduce que los planos perpendiculares al eje cortan a la superficie según circunferencias, generalmente, las cuales se llaman *paralelos,* aludiendo a los círculos respectivos. Las intersecciones de la superficie con planos que pasan por el eje se llaman *meridianos.* Los meridianos se llaman también *generatrices de la superficie,* porque pueden ser considerados como generadores de las superficies, al girar alrededor del eje.

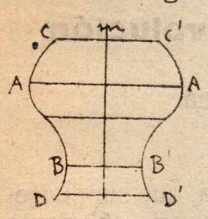


Fig. 5.ª

Las superficies de revolución más importantes son las superficies *cónicas* de revolución, las *cilíndricas* y las *esféricas;* según que la generatriz sea una recta o semirecta que corta el eje, o una recta paralela al eje, o una semicircunferencia cuyo diámetro está en el eje. Las estudiaremos individualmente.

En resumen:

Se llama superficie de revolución la figura engendrada por la rotación de una línea que gira alrededor de una recta fija, llamada eje, hasta dar una vuelta completa.

Ejercicios

1. Dibuja un cilindro de base circular. Suponiendo que las generatrices forman con el plano de una base ángulos de 60°, calcula la altura o distancia entre las bases, de dicho cilindro, si la generatriz mide 5 cm.

2. Dibuja los rectilíneos correspondientes a los ángulos diedros del dodecaedro regular y del icosaedro regular.

3. Calcula en grados los valores de esos ángulos diedros, utilizando las tablas trigonométricas.

4. Si un trapecio rectangular gira alrededor de su base mayor hasta dar una vuelta completa, dígase qué clases de superficies engendran cada uno de los tres lados que se mueven.

TEMA 11.°

Superficie cilíndrica de revolución.

1. El concepto de superficie cilíndrica de revolución.

Traza un plano α, y traza en él una curva, que supondremos representa una circunferencia del espacio. Suponte todas las rectas que son perpendiculares a ese plano y que pasan por algún punto de la circunferencia. Traza algunas de ellas, como en la figura 1.ª, dibujando de trazo lleno las que se vean y de puntos las que no se ven. Siendo todas estas rectas paralelas entre sí, por ser perpendiculares a un mismo plano, la figura que forman será una *superficie cilíndrica.*

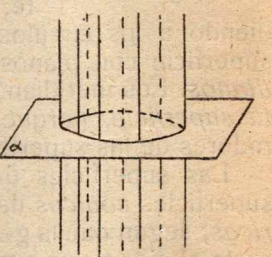


Fig. 1.ª

Además, la superficie es *de revolución,* siendo el eje la perpendicular al plano de la circunferencia, trazada por el centro de la misma; pues todo plano perpendicular al eje corta a la superficie según una circunferencia, cuyo centro está en el eje, como enseguida demostraremos.

Las rectas que integran la superficie ya sabemos que se llaman *generatrices,* y la paralela a ellas por el centro de la

circunferencia, hemos dicho que se llama *eje;* llamándose *radio* el de dicha circunferencia. A ésta se le llama *directriz.*

En resumen:

Se llama superficie cilíndrica de revolución la figura formada por todas las rectas que son perpendiculares al plano de una circunferencia y pasan por algún punto de la misma.

2. Secciones planas.

Secciones por planos paralelos a generatrices.

Un plano que sea paralelo a una generatriz de una superficie cilíndrica de revolución será perpendicular al plano de la circunferencia directriz, y cortará a este plano según una recta, secante, tangente o exterior a dicha circunferencia. En el primer caso, aquel tendrá común con la superficie cilíndrica dos generatrices, que son las que pasan por los puntos de intersección de la secante con la circunferencia; en el segundo caso tendrá común una sola generatriz, y en el tercero no tendrá puntos comunes. En particular, *un plano que pase por el eje* de una superficie cilíndrica, la corta según *dos generatrices,* cuya distancia es igual al diámetro de la circunferencia directriz; formando lo que se llama una *sección principal.*

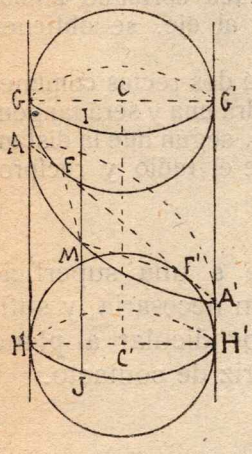


Fig. 2.ª

Secciones por planos perpendiculares al eje.

Todo plano perpendicular al eje, y por consiguiente, a las generatrices de una superficie cilíndrica de revolución, la corta según una circunferencia, cuyo centro está en el eje, y que tiene el mismo radio que la circunferencia directriz.

Pues ese plano, perpendicular al eje, será paralelo al de la circunferencia directriz, y ambos planos serán cortados por cualquier plano que pase por el eje, según dos rectas paralelas, que forman con dos generatrices un rectángulo, lo que prueba que los puntos de la línea sección, distan del eje una longitud igual al radio de la circunferencia directriz, y formarán otra circunferencia del mismo radio.

Secciones por planos oblícuos al eje.

Todo plano oblícuo al eje de una superficie cilíndrica de revolución la corta según una *elipse*. La demostración del teorema está indicada en la figura 2.ª, pero no la detallamos por brevedad. La elipse de la figura es la curva AMA' y los *focos* son los puntos F y F'.

En resumen:

Si un plano es paralelo a las generatrices de una superficie cilíndrica de revolución, la intersección de la superficie puede ser un par de generatrices, una sola generatriz, o ninguna. Si el plano es perpendicular al eje, la intersección es una circunferencia, y si el plano es oblícuo al eje, corta a la superficie según una elipse.

3. Plano tangente a la superficie cilíndrica de revolución.

Los teoremas de la geometría plana sobre posiciones relativas de una circunferencia y una recta de su plano, son aplicables a las posiciones de una superficie cilíndrica de revolución y un plano pararelo al eje, pues cortando ambas superficies por un plano perpendicular al eje, se obtienen una circunferencia y una recta.

Y así, el plano paralelo al eje tendrá dos rectas comunes con la superficie y será secante, o tendrá una y será tangente, o no tendrá ninguna y será exterior, según que la distancia al eje sea menor, igual o mayor que el radio y recíprocamente.

En resumen:

Para que un plano sea tangente a una superficie cilíndrica de revolución, es condición necesaria y suficiente que sea paralelo al eje, y perpendicular al plano que pasa por el eje y por la generatriz de contacto.

4. Cilindro de revolución.

Cilindro indefinido.

Dado un círculo, todas las rectas perpendiculares a su plano, que pasan por algún punto del círculo, forman una figura que se llama *cilindro indefinido de revolución*. Entre

esas rectas, las que pasan por algún punto de la circunferencia forman una *superficie* cilíndrica de revolución, que se llama superficie del cilindro indefinido. El radio, diámetro, eje, plano tangente, etc., de esta superficie, se dicen también del cilindro indefinido.

Cilindro finito.

Dado un cilindro indefinido de revolución, la porción de él, comprendida entre dos planos perpendiculares al eje, se llama *cilindro finito de revolución,* o simplemente, *cilindro de revolución.* Dibuja un cilindro como el de la figura 3.ª.

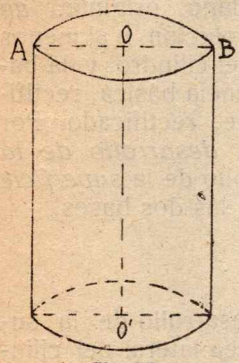


Fig. 3.ª

Los dos círculos secciones de los planos perpendiculares al eje se llaman *bases* del cilindro finito.

La distancia entre las bases se llama *altura.*

Generatriz o *lado* del cilindro de revolución es el segmento paralelo al eje que une dos puntos de las circunferencias básicas.

Según esto, el cilindro de revolución está formado por los segmentos perpendiculares a las bases, que unen dos puntos cualesquiera de las mismas. El nombre de revolución obedece a la idea intuitiva según la cual el cilindro es el cuerpo engendrado por la rotación de un rectángulo alrededor de uno de sus lados.

Generalización de estos conceptos.

En general, dado un recinto plano, todas las rectas paralelas entre sí que, sin estar en su plano, pasan por algún punto de aquel recinto, forman una figura que se llama *cilindro indefinido.* Y la porción de cilindro indefinido limitada por dos lados paralelos que corten a las rectas que lo forman, se llama *cilindro finito*; llamándose *bases* a las secciones producidas por esos planos, y altura la distancia entre las bases.

Cuando los segmentos que definen el cilindro finito son perpendiculares a las bases, se llama *cilindro recto,* y cuando no, se llama *cilindro oblicuo.* El cilindro de revolución es recto.

En resumen:

Se llama cilindro de revolución el cuerpo engendrado por la rotación de un rectángulo que gira alrededor de uno de sus lados, dando una vuelta completa.

5. Desarrollo y área de la superficie de un cilindro de revolución.

Desarrollo.

Intuitivamente se comprende que si la superficie lateral de un cilindro la recubrimos de papel, y cortándolo por una generatriz, lo desarrollamos sobre un plano, originará *un rectángulo*, cuando el cilindro sea de revolución, o al menos recto, siendo la altura del rectángulo la del cilindro, y la base es un segmento igual a la circunferencia básica, rectificada, o en general, al contorno de la base, rectificado. Por esta razón, a este rectángulo se le llama *desarrollo de la superficie lateral del cilindro*. El desarrollo de la *superficie total* se obtiene agregando al rectángulo las dos bases.

Area del cilindro.

El área de ese rectángulo, que es desarrollo de la superficie lateral del cilindro, se le llama área lateral del cilindro. Por tanto, *el área de un cilindro de revolución es el producto de su altura, o lado, por la longitud de la circunferencia básica rectificada*. Si el lado es *h*, y el radio de la base *r*, escribe la fórmula del área lateral: $A = 2\pi rh$.

Escribe ahora la fórmula del área total, sacando en ella factor común:

$$2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r.\ (h + r).$$

Y si se trata de un *cilindro oblícuo*, podremos definir la *sección recta* como se define la del prisma oblícuo, y resulta: *el área lateral de un cilindro oblícuo es igual al perímetro de la sección recta por el lado.*

Observación sobre las áreas de superficies curvas.

Se ha venido admitiendo hasta hace algún tiempo la siguiente definición: «área de una superficie curva es el límite de las áreas de las superficies poliédricas inscritas, cuando las caras disminuyen indefinidamente». La crítica moderna ha demostrado lo defectuoso de esta definición, y en particular, Schwarz ha demostrado que según ella el área lateral

de un cilindro dado puede tener cualquier valor prefijado, eligiendo convenientemente las superficies poliédricas inscritas, y la ley de tendencia al límite.

Por diversos procedimientos se dan hoy definiciones correctas del área de una superficie curva, que se salen en cierto modo de los límites de la geometría elemental. Bástanos indicar que a la definición anterior se le debe añadir al menos la condición de que las caras de las superficies poliédricas inscritas tiendan uniformemente a ser planos tangentes.

En resumen:

El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es un rectángulo, que tiene por base la circunferencia básica del cilindro rectificada, y por altura la misma que el cilindro. El área lateral del cilindro de revolución es igual al producto de la circunferencia de la base por el lado o altura.

6. Noción de la hélice ordinaria.

Como un ejemplo de *curvas alabeadas,* es decir, de curvas cuyos puntos no están todos en un plano, vamos a dar una noción intuitiva de la *hélice ordinaria.* Supongamos que sobre una superficie cilíndrica de revolución se arrolla una porción de superficie plana, limitada por los lados de un ángulo agudo (figura 4.ª), de manera que uno de los lados del ángulo se arrolla sobre una circunferencia, sección de la superficie cilíndrica, por un plano perpendicular al eje.

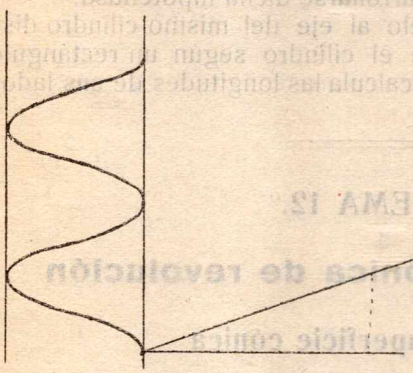


Fig. 4.ª

Entonces el otro lado del ángulo va adaptándose a la superficie cilíndrica, tomando la forma de una línea que se llama hélice ordinaria, o hélice cilíndrica. Es la forma que se le da a la cresta de un tornillo. La porción de hélice comprendida entre dos puntos consecutivos de intersección de

ella con una generatriz, se llama *rosca,* y la distancia entre esos puntos, *paso de rosca.* La longitud de un trozo de hélice, es la hipotenusa del triángulo rectángulo que se ha arrollado sobre la superficie.

En resumen:

Cuando un ángulo agudo se arrolla sobre una superficie cilíndrica de revolución, de manera que uno de sus lados se arrolle sobre una circunferencia de la superficie, el otro lado va formando al arrollarse una línea que se llama hélice ordinaria o hélice cilíndrica.

Ejercicios

1. Dibújese en perspectiva un cilindro de revolución. Si suponemos que el diámetro básico mide 3 cm., y la altura mide 6 cm., dibújese el desarrollo de su superficie total.
2. Calcúlese el área total del cilindro considerado en el problema anterior.
3. Suponiendo que sobre ese mismo cilindro se arrolla un triángulo rectángulo de modo que un cateto se arrolle sobre una circunferencia del cilindro, y que forme con la hipotenusa un ángulo de 30°, calcular el paso de rosca de la hélice que se forma al arrollarse dicha hipotenusa.
4. Si un plano paralelo al eje del mismo cilindro dista de este eje 1 cm., cortará el cilindro según un rectángulo. Dibuja ese rectángulo, y calcula las longitudes de sus lados.

TEMA 12.°

Superficie cónica de revolución

1. El concepto de superficie cónica de revolución.

Traza una circunferencia de centro O (figura 1.ª); toma un punto V exterior a su plano, y situado en la perpendicular a él por el punto O. La figura formada por todas las rectas que pasan por V y por algún punto de la circunferencia, se llama *superficie cónica de revolución,* de dos hojas; y la formada por todos los rayos que parten de V y pa-

san por algún punto de la circunferencia, se llama superficie cónica de revolución de una hoja.

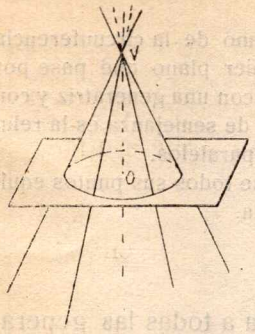


Fig. 1.ª

Estas denominaciones se justifican recordando las definiciones generales de superficie cónica, y de superficie de revolución, y teniendo en cuenta que, como luego veremos, la figura definida es cortada por un plano perpendicular a la recta OV, llamada eje, según una circunferencia. Esa superficie se puede suponer engendrada por la rotación de una recta que corta a otra recta fija en un punto dado y forma con ella un ángulo constante.

Las rectas que integran la superficie sabemos que se llaman *generatrices,* y la circunferencia de centro O, circunferencia *directriz.* Las generatrices forman con el eje un ángulo que es igual para todas, puesto que son oblicuas cuyos pies se apartan igual del pie de la perpendicular, o lo que es lo mismo, porque forman con el eje, y con el radio respectivo de la circunferencia directriz, triángulos rectángulos iguales.

En resumen:

Se llama superficie cónica de revolución la figura formada por todas las rectas que cortan a otra en un punto dado y que forman con ella un ángulo dado.

2. Secciones planas.

Secciones por planos que pasan por el vértice.

Si un plano pasa por el vértice de una superficie cónica de revolución, cortará al plano de la circunferencia directriz en una recta, o es paralelo a este plano. Dicha recta será exterior, tangente o secante a la circunferencia directriz. En el primer caso, el plano secante no tendrá con la superficie cónica más punto común que el vértice; en el segundo caso tendrá común una generatriz, la que pasa por el punto de contacto de la tangente, y en el tercer caso tendrá comunes dos generatrices, las que pasan por los puntos de intersección de la secante.

Secciones por planos perpendiculares al eje.

Un plano perpendicular al eje corta a la superficie cónica

de revolución según una circunferencia, cuyo centro está en el eje, que se reduce a un punto si el plano pasa por el vértice.

Pues el plano secante será paralelo al plano de la circunferencia directriz, y ambos serán cortados por cualquier plano que pase por el eje según dos rectas paralelas, que forman con una generatriz y con el eje, dos triángulos semejantes, cuya razón de semejanza es la relación de las distancias del vértice a los planos paralelos.

Esto demuestra que la curva sección tiene todos sus puntos equidistantes del eje, y que será una circunferencia.

Sección por un plano oblicuo al eje.

Si un plano es oblícuo al eje y corta a todas las generatrices, la sección es un *elipse.* La demostración está indicada en la figura 2.ª, aunque no la detallamos en obsequio a la brevedad. La elipse es la AMA' y los focos los puntos F y F'. Cuando el plano secante a una superficie cónica de re-

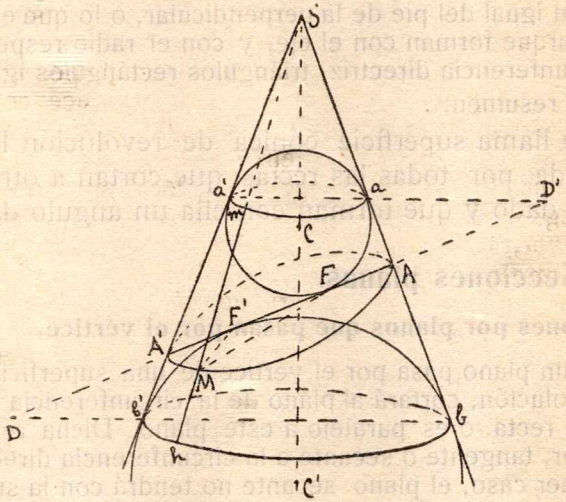


Fig. 2.ª

volución es paralelo a una generatriz y corta a las demás, la sección es una *parábola;* y cuando es paralelo a dos generatrices, es *una hipérbola,* cuyas dos ramas corresponden a las dos hojas. Se demuestran estos teoremas análogamente que el anterior, pero no hacemos la demostración por razones de brevedad.

En resumen:

Los planos que pasan por el vértice de una superficie cónica tienen común con ella dos generatrices, o una generatriz, o solo el vértice.

Los planos que son perpendiculares al eje, sin pasar por el vértice, cortan a la superficie según circunferencias, cuyos centros están en el eje. Los planos que son oblícuos al eje y cortan a todas las generatrices, dan como sección una elipse. Si son paralelos a una generatriz, y cortan a las demás, dan como sección una parábola; y si son paralelos a dos generatrices, dan como sección una hipérbola.

3. Plano tangente a la superficie cónica de revolución.

Los teoremas de la geometría plana sobre posiciones relativas de una circunferencia y una recta de su plano son aplicables a las posiciones relativas de una superficie cónica de revoluclón y un plano que pase por el vértice; resultando que el plano será exterior, es decir, sin generatrices comunes con la superficie, o tangente, es decir, con una generatriz común, o secante, es decir, con dos generatrices comunes, según que el ángulo formado por el eje con el plano sea mayor, igual o menor que el ángulo formado por el eje con las generatrices. Resulta de esto que el plano tangente tiene la propiedad de ser perpendicular al determinado por el eje y la generatriz de contacto; pues pasa por una perpendicular a este plano, que es la tangente a la circunferencia directriz.

En resumen:

Para que un plano sea tangente a la superficie cónica de revolución es condición necesaria y suficiente que sea perpendicular al determinado por el eje y la generatriz de contacto.

4. Cono de revolución.

Cono indefinido.

Traza un círculo y toma un punto exterior a su plano, y situado en la perpendicular a él por el centro del círculo.

Se llama cono indefinido de revolución la figura formada por todas las rectas que pasan por el punto dado y por algún punto del círculo dado. De todas esas rectas, las que pasan por algún punto de la circunferencia correspondiente al círculo, forman una superficie cónica de revolución, que se llama superficie del cono indefinido. Sus elementos reciben iguales denominaciones.

Cono finito.

Dado un cono indefinido de revolución, al cortarlo por un plano perpendicular al eje, la porción comprendida entre ese plano y el vértice se llama *cono finito de revolución.* Dibújalo como en la figura 3.ª.

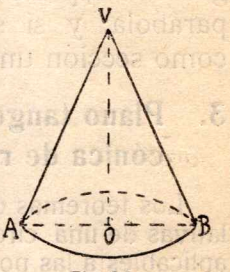


Fig. 3.ª

Resulta de esta definición que el cono finito de revolución está formado por todos los segmentos que unen los puntos de un círculo con un punto fijo exterior a su plano, y situado en la perpendicular a él trazada por el centro del círculo. El punto fijo se llama *vértice,* el círculo se llama *base;* la porción de generatriz se llama *lado* o *generatriz del cono;* la perpendicular del vértice a la base se llama *altura del cono;* y la figura formada por todas sus generatrices se llama *superficie lateral.*

El nombre de cono de revolución obedece a la idea intuitiva según la cual el cono es el cuerpo engendrado por la rotación de un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos, hasta dar una revolución completa.

En resumen:

Se llama cono de revolución la figura engendrada por la rotación de un triángulo rectángulo que gira alrededor de uno de sus catetos hasta dar una vuelta completa. El cateto móvil engendra un círculo, que se llama base del cono. El cateto fijo se llama altura del cono. La hipotenusa engendra la superficie lateral del cono. La longitud de dicha hipotenusa se llama lado del cono.

5. Tronco de cono.

Si un cono indefinido lo cortas por dos planos perpendiculares al eje, la porción comprendida entre los dos planos

se llama *tronco de cono de revolución*. Si los dos planos están a un mismo lado del vértice el tronco se llama de primera especie, y es el único que estudiaremos; si están a distinto lado se llama de segunda especie. Se supone desde luego que ninguno de los dos planos pasa por el vértice.

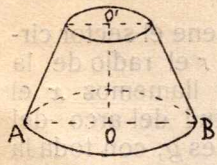


Fig. 4.ª

Las secciones producidas por los dos planos se llaman *bases*, y la distancia entre las bases se llama *altura*. Dibuja un tronco de cono de revolución como en la figura 4.ª Si en un cono finito trazamos un plano paralelo a la base, y comprendido entre ella y el vértice, el cono queda dividido en dos partes, una de las cuales es un tronco de cono y la otra un nuevo cono llamado *deficiente*. Los radios de las bases de ambos conos, total y deficiente, o sea, de las bases del tronco, *son proporcionales a las alturas de los mismos, y sus áreas proporcionales a los cuadrados de esas alturas*.

Intuitivamente, el tronco de cono de revolución se puede considerar engendrado por un trapecio rectángulo que gira alrededor del lado perpendicular a las bases, verificando una revolución completa. Por esto se llama generatriz del tronco al que hace de lado hipotenusa de ese trapecio.

Generalización de estos conceptos.

En general, dada un área plana, y un punto fuera de su plano, se llama *cono indefinido* la figura formada por todas las rectas que pasan por algún punto del área y por el punto dado. Y si ese cono indefinido se corta por un plano que encuentre a todas las rectas de la superficie del cono indefinido, la porción de éste comprendida entre el plano secante y el vértice se llama *cono finito*; definiéndose análogamente el *tronco de cono*.

En resumen:

Se llama tronco de cono de revolución la figura engendrada por un trapecio rectángulo que gira alrededor del lado perpendicular a la bases, dando una vuelta completa.

6. Desarrollo y área de la superficie del cono de revolución.

Desarrollo.

De acuerdo con la intuición, se llama desarrollo de la su-

perficie lateral de un cono de revolución a un *sector circular*, cuyo radio es el lado o generatriz del cono, y cuyo arco tiene la misma longitud que la circunferencia de la base del cono.

Para calcular el número de grados que tiene el sector circular obtenido en ese desarrollo, llamemos r el radio de la base del cono y g la longitud de su lado, y llamemos x el número de grados que debe tener la amplitud del arco del sector. Comparando ese sector, cuyo radio es g, con toda la circunferencia de 360°, podremos aplicar una regla de tres que diga:

Si el ángulo fuera de 360° la circunferencia sería $2\pi g$.
Si el ángulo es x° la circunferencia será $2\pi r$.

$$x = \frac{360 \times 2\pi r}{2\pi g} = 360 \times \frac{r}{g}$$

El desarrollo total de la superficie del cono se obtendrá agregando al sector que representa el desarrollo lateral un círculo igual al de la base.

Area de la superficie del cono de revolución.

Se llama área de la superficie del cono de revolución al área de su desarrollo.

Por lo cual, recordando que «el área de un sector circular es igual a la mitad de la longitud del arco rectificado por la del radio», podrás expresar el área lateral y total del cono de radio r y lado g. Escríbelo:

Ar. lat. cono $= \pi rg$.

Ar. tot. cono $= \pi rg + \pi r^2 = \pi r.(g + r)$.

En resumen:

Se llama desarrollo de la superficie de un cono de revolución a un sector circular cuyo radio es el lado o generatriz del cono, y cuyo arco tiene la misma longitud que la circunferencia de la base del cono.

El área lateral del cono de revolución es igual a la semicircunferencia de la base, por el lado o generatriz.

7. Desarrollo y área del tronco de cono de revolución.

La superficie del tronco de cono de revolución se obtiene quitándo a la del cono total la del deficiente, por lo cual

se llama desarrollo de dicha superficie a la figura que se obtiene quitando al desarrollo del cono total, el del deficiente.

En cuanto al área de la superficie lateral se define como diferencia entre las del cono total y del deficiente; o como límite común de las áreas de dos troncos de pirámide regular de *n* caras laterales, cuyas bases están inscritas y circunscritas, respectivamente, en las bases del tronco de cono.

Como el área de la superficie lateral de un tronco de pirámide regular es igual a la sección media por el apotema, se deduce que *el área lateral del tronco de cono es igual a la longitud de la circunferencia media, por la generatriz o lado del tronco*. Es decir que si llamas C a la longitud de la circunferencia media, y a su radio r, el cual es igual a la semisuma de los radios de las bases, y llamas g al lado o generatriz del tronco, escribe el área lateral S:

$$S = C \cdot g = 2\pi rg.$$

Escribe el área total T, siendo R y R' los radios de las bases:

$$T = S + \pi R^2 + \pi R'^2 = 2\pi . \frac{R+R'}{2} g + \pi R^2 + \pi R'^2 =$$

$$= \pi . \left[(R+R').g + R^2 + R'^2 \right]$$

En resumen:

El desarrollo de la superficie lateral de un tronco de cono es la diferencia entre los dos sectores circulares correspondientes al cono total y al cono deficiente. El área lateral del tronco de cono es igual a la longitud de la circunferencia media, por el lado o generatriz.

Ejercicios

1. Dibújese un cono de revolución, y en el supuesto de que el diámetro básico mida 5 cm., y la altura mida 4 cm., constrúyase el desarrollo de su superficie lateral, calculando previamente el lado o generatriz, y el ángulo del sector circular que se desea construir.

2. Calcúlese el área lateral del mismo cono del problema anterior.

3. Si por el punto medio de la altura correspondiente a ese mismo cono se traza un plano paralelo a la base, este plano divide al cono en dos partes, la mayor de las cuales

es un tronco de cono. Dibújese el desarrollo de la superficie lateral de este tronco.

4. Calcúlese el área lateral del mismo tronco considerado en el problema anterior.

TEMA 13.º

Superficie esférica y esfera

1. Conceptos de superficie esférica y esfera.

Superficie esférica.

La superficie esférica es el lugar geométrico de los puntos del espacio cuyas distancias a un punto dado, llamado *centro,* es igual a la longitud de un segmento dado, llamado *radio*. Dibuja una esfera como en la figura 1.ª. Más propiamente se llaman radios a los segmentos que unen el centro con los puntos de la superficie OA, OB...

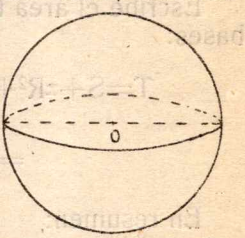


Fig. 1.ª

De la definición se deduce inmediatamente, lo mismo que para la circunferencia, que toda semirecta que parte del centro, encuentra en un punto, y uno solo, a la superficie; y que toda recta que pasa por el centro encuentra en dos puntos a la superficie, llamándose *diámetro* al segmento que determinan, el cual tiene como punto medio el centro.

En general, todo segmento que une dos puntos de la superficie esférica se llama *cuerda*.

Esfera.

La superficie esférica divide a los demás puntos del espacio en dos regiones, sin puntos comunes; los de una región se llaman interiores, y son aquellos cuya distancia al centro es menor que el radio, y los otros son exteriores, y son aquellos cuya distancia al centro es mayor que el radio. Pues así ocurre con los puntos de toda semirecta que parte por el centro.

Los puntos interiores a una superficie *esférica,* y los de la misma superficie, forman una figura que se llama *esfera*.

El centro, radio, diámetro, cuerda..., de la superficie esférica, reciben las mismas denominaciones para su respectiva esfera.

En resumen:

Se llama superficie esférica la figura formada por todos los puntos del espacio cuya distancia a un punto dado, llamado centro, es igual a un segmento dado, llamado radio.

Esfera es la porción de espacio limitada por la superficie esférica.

2. Determinación de la superficie esférica.

Ya sabes que tres puntos no alineados determinan una circunferencia. Asimismo, *cuatro puntos que no están en un plano determinan una superficie esférica;* es decir que por ellos pasa una superficie esférica y solo una.

En efecto, dibuja cuatro puntos A, B, C y D, qne supondremos no estén en un plano. No puede haber tres de ellos que estén en línea recta, pues por esa recta y el cuarto pasaría un plano. Los tres primeros puntos A, B y C serán, pues, los vértices de un triángulo, y los tres últimos B, C y D serán los vértices de otro triángulo.

Traza por los circuncentros O y O' de estos triángulos las perpendiculares OP y O'P' a sus respectivos planos (figura 2.ª). Cada una de estas perpendiculares es lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los vértices del respectivo triángulo; pues por ejemplo, cualquier punto de OP equidista de A, B y C, yá que uniendo estos puntos con el P se forman oblicuas cuyos pies se apartan igual del pie de la perpendicular; y cualquier punto que no esté en OP, no equidista de A, B y C, pues las oblicuas respectivas no se apartan igual de la perpendicular, y no son iguales.

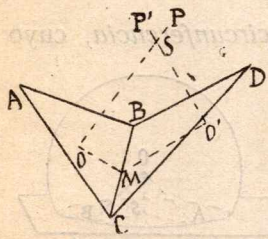


Fig. 2.ª

Las dos perpendiculares OP y O'P' están en un plano, en el determinado por las mediatrices OM y O'M' al segmento BC, trazadas en los respectivos planos ABC y DBC. En efecto, estas mediatrices determinan un plano OMO' perpendicular a la recta BC, y perpendicular, por tanto, a los planos de los triángulos, y es claro, que entonces las rectas OP y O'P' estarán en ese plano OMO'. Por otra parte, como son perpendiculares a dos rectas que se cortan OM y O'M, ellas tam-

bién se cortan en un punto S, que por estar en OP equidista de A, B y C, y por estar en O'P' equidista de B, C y D, lo que prueba que equidista de los cuatro, y será centro de una superficie esférica, cuyo radio es esa distancia común. Pasa, pues, una superficie esférica por los cuatro puntos; y no pasa otra porque su centro tendría que estar a la vez en la OP y O'P', y se confundiría con el S.

En resumen:

Cuatro puntos que no estén en un plano determinan una superficie esférica.

3. Intersección de la superficie esférica con un plano, o con otra superficie esférica.

Plano que pasa por el centro.

Todo plano que pasa por el centro de una superficie esférica la corta según una circunferencia del mismo centro y radio que la superficie esférica.

Pues la curva intersección estará formada por todos los puntos del plano secante, cuya distancia al centro de la superficie esférica es igual al radio de ésta, por lo cual será una circunferencia.

Plano que no pasa por el centro, pero que dista de éste menos que el radio.

Entonces la intersección es *una circunferencia,* cuyo centro es el pie de la perpendicular trazada desde el centro de la esfera al plano, y cuyo radio es *menor* que el de la esfera. Dibújala como en la figura 3.ª.

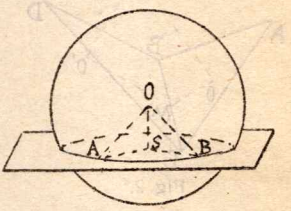


Fig. 3.ª

En efecto, todos los puntos de la línea intersección son pies de oblicuas iguales que parten del centro de la esfera, luego estos pies equidistan del pie de la perpendicular trazada desde el centro al plano secante, y formarán una circunferencia cuyo centro es este pie de la perpendicular.

Siendo el radio un cateto de un triángulo rectángulo, en el cual la hipotenusa es el radio de la esfera, se deduce que la circunferencia es de menor radio que la esfera.

Por esta causa a las circunferencias intersecciones de la

superficie esférica con planos que pasan por su centro se les llama *circunferencias máximas;* y a las circunferencias intersecciones de la superficie esférica con otros planos que no pasan por el centro se les llama *circunferencias menores;* y a sus círculos, *círculo máximo,* y *círculo menor,* respectivamente.

Los extremos del diámetro de una esfera, perpendicular al plano de un círculo máximo, o de un círculo menor, se llaman *polos de este círculo.*

Intersección de dos superficies esféricas.

Cuando dos superficies esféricas tienen sus centros a una distancia menor que la suma de los radios, y mayor que su diferencia, se cortan según *una circunferencia,* de plano perpendicular a la recta que une los centros de las esferas, plano que corta a esa recta en un punto, que es el centro de la circunferencia misma.

Pues cualquier plano que pase por la recta que une los centros, corta a las dos superficies esféricas según circunferencias del mismo centro y radio que ellas, por lo cual serán circunferencias secantes, cuya cuerda común es un segmento que tiene por mediatriz la recta de los centros. El plano perpendicular a esa recta de los centros y que pasa por la cuerda común, corta a las superficies esféricas según circunferencias, cuyo radio tiene que ser la mitad de esa cuerda común, y formarán entonces una sola circunferencia, intersección de las dos superficies esféricas.

Posiciones de una recta y una esfera.

Si una recta pasa por el centro de una superficie esférica, ya sabemos que la corta según dos puntos, llamándose *secante;* y si no pasa por el centro, determina con él un plano, que corta a la superficie esférica según una circunferencia máxima. La recta será *secante, tangente* o *exterior* a esa circunferencia según que la distancia al centro sea menor, igual o mayor que el radio, y esto ocurrirá con la recta y la superficie esférica; será la recta, secante (con dos puntos comunes), o tangente (con un punto común), o exterior (sin puntos comunes), según que esa distancia al centro sea menor, igual o mayor que el radio.

Como *los recíprocos* son ciertos, resulta que *para que una recta sea tangente a una superficie esférica es condición necesaria y suficiente que sea perpendicular a un radio en su extremo.*

Posiciones de un plano y una esfera.

Dada una esfera y un plano, todo plano que pase por el centro cortará a la superficie esférica según una circunferencia máxima, y si es perpendicular el plano dado, cortará a éste según una recta, que puede ser secante, tangente o exterior a la circunferencia máxima, y el plano dado será respectivamente *secante* (con una circunferencia común) o *tangente* (con un punto común) o *exterior* (sin puntos comunes a la superficie esférica), según que la distancia al centro sea menor, igual o mayor que el radio.

Como los *recíprocos,* son ciertos, resulta que *para que un plano sea tangente a una superficie esférica es condición necesaria y suficiente que la distancia al centro sea igual al radio, es decir, que sea perpendicular a un radio en su extremo.* Además, contiene a todas las tangentes a la esfera que pasan por el punto de contacto, como debe ocurrir con todo plano tangente en un punto ordinario.

Posiciones de dos esferas.

Cualquier plano que pase por la recta de los centros corta a dos esferas según circunferencias máximas, y las cinco posiciones que éstas pueden ocupar, nos dan las cinco posiciones análogas que pueden ocupar las dos esferas. En particular, las tangentes tienen la recta de los centros de modo que pasa por el punto de contacto.

En resumen:

Si un plano pasa por el centro de una esfera la corta según una circunferencia del mismo radio que la esfera, que se llama circunferencia máxima.

Si el plano no pasa por el centro, pero la distancia a este centro es menor que el radio, corta a la esfera en una circunferencia de menor radio que el de la esfera, la cual se llama circunferencia menor.

Si el plano dista del centro una longitud igual al radio, tiene común con una esfera un solo punto, y se llama plano tangente.

Si el plano dista del centro más que el radio, no tiene ningún punto común con la esfera, llamándose plano exterior a ella.

Cuando dos superficies esféricas se cortan, su in-

tersección es también una circunferencia, cuyo plano es perpendicular a la recta que une los centros y que tiene su centro en esa misma recta

4. Area de la zona esférica y de la esfera.

Nueva fórmula del área del tronco de cono.

Para obtener el área de la esfera conviene dar otra fórmula del área del tronco de cono de revolución. Dibuja uno, como en la figura 4.ª. Escribe la fórmula del área lateral: $S = 2\pi rl$. Traza el segmento FH, situado en la mediatriz de AB, y limitado en la generatriz AB y en el eje; se forman así dos triángulos semejantes FGH~AEB, de donde se deduce $\frac{z}{l} = \frac{r}{h}$; $r.l = z.h$, y por tanto será: $S = 2\pi z.\ h$. La misma fórmula se aplica cuando AB es paralelo al eje, es decir, cuando el tronco se ha convertido en un *cilindro,* o cuando la base menor se ha reducido a un punto, es decir, el tronco se ha convertido en un *cono de revolución,* como puedes comprobar.

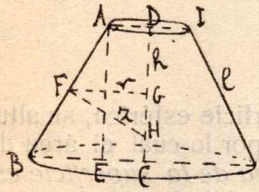


Fig. 4.ª

Area de la zona esférica.

Zona esférica es la porción de superficie esférica limitada por dos planos paralelos que son secantes. Por extensión también se llama zona esférica a la limitada por un plano secante y otro tangente, aunque es más corriente llamarle *casquete esférico*; o todavía se puede tomar como zona esférica toda la superficie esférica, que se puede considerar limitada por dos planos tangentes, paralelos entre sí.

Para definir *el área de una zona esférica,* supongamos que se traza un plano que pase por el diámetro de la esfera, perpendicular a los planos que limitan la zona. Esta es cortada en dos arcos de circunferencia máxima. En uno de ellos podemos inscribir una quebrada poligonal de lados iguales, y circunscribir otra en la forma que dijimos para el arco de circunferencia, y sus lados serán generatrices de troncos de cono, o de cilindros y conos, cuyo eje está en el diámetro perpendicular dicho. Dibuja la figura correspondiente como en la figura 5.ª

Escribe la suma de las superficies laterales de estos cuerpos correspondiente a la quebrada del inscrito, según la fórmula anterior: 2π. OI. (EF+EG+GH)=2π. OI.EH; y análogamente para el circunscrito. Al hacer crecer indefinidamente el número de lados, esas sumas de superficies tienen el mismo límite, que es el siguiente: 2.EH.lim.OI=2πr.EH, al cual se llama área de la zona esférica. Luego *el área de una zona esférica es igual a la circunferencia máxima de la esfera, multiplicada por la altura de la zona,* llamándose altura a la distancia de los planos que limitan la zona.

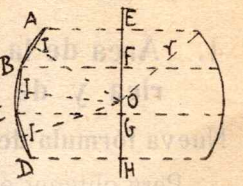


Fig. 5.ª

Area de la superficie esférica.

Si la zona comprende toda la superficie esférica, su altura es igual al diámetro de la esfera, por lo cual el área de ésta será: $2\pi r.2r=4\pi r^2$ es decir, *el área de la superficie esférica es igual a cuatro veces el área del círculo máximo,* o sea $4\pi r^2$.

En resumen:

El área de una zona esférica es igual a la circunferencia máxima de la esfera multiplicada por la altura de la zona; y el área de la esfera es igual a cuatro veces al área del círculo máximo.

Ejercicios

1. Una esfera, cuyo radio es 1 cm., se corta por un plano, cuya distancia al centro es medio centímetro. Calcular el área del círculo sección.
2. Calcular el área de la superficie terrestre, supuesta esférica, aplicando la definición del metro.
3. Calcular el área de la zona tórrida, recordando que el plano de la eclíptica forma con el plano del Ecuador un ángulo de 23° 27'.
4. Dos superficies esféricas iguales, que tienen un radio de 3 centímetros, están situadas de manera que la distancia entre sus centros es de 4 cm. Calcular la longitud de la circunferencia intersección de esas dos superficies esféricas.

TEMA 14.º

Triángulos y polígonos esféricos

1. Geometría esférica.

Las figuras situadas sobre una superficie esférica tienen cierta analogía con las situadas sobre un plano, y de éstas han tomado en gran parte la nomenclatura. Pero hay más analogía todavía entre las figuras esféricas y las *radiadas,* es decir, las formadas por rayos, o sea semirrectas, de una radiación; pues toda figura formada por puntos de una superficie esférica podemos proyectarla desde el centro de la esfera, es decir, podemos hacer pasar por cada punto de la figura esférica un rayo que parta del centro. Recíprocamente, a toda figura radiada podemos hacerle corresponder una figura esférica, considerando una superficie esférica cuyo centro esté en el vértice de la radiación.

Determinación de una circunferencia máxima.

En la radiación, dos rayos que no estén en prolongación determinan un plano. En la superficie esférica, *dos puntos que no sean extremos de un mismo diámetro, es decir, que no sean opuestos, determinan una circunferencia máxima.* Pues proyectando los dos puntos desde el centro se obtienen dos rayos que determinan un plano, el cual corta a la superficie en una circunferencia máxima.

En la radiación, cuando los rayos son opuestos, por ellos pasan infinitos planos; en la superficie esférica, por dos puntos opuestos pasan infinitas circunferencias máximas.

Distancia esférica.

Dos rayos de una radiación determinan un ángulo convexo o llano. Dos puntos de una superficie esférica determinan un arco de circunferencia máxima, menor o igual que una semicircunferencia. A este arco se le llama *distancia esférica* entre los dos puntos, y puede darse en longitud o en amplitud.

Cuando los puntos o rayos son *opuestos,* la posición no está determinada, sino solamente la magnitud del arco o ángulo de 180°.

Angulo esférico.

Dos semiplanos que parten de una misma recta de una radiación determinan un ángulo diedro convexo y otro cóncavo, o dos llanos. Dos semicircunferencias máximas que tienen los mismos extremos determinan un *ángulo esférico convexo y otro cóncavo,* o dos llanos. Y así por ejemplo, si en la figura 1.ª consideramos dos semicircunferencias máximas de los mismos extremos tales como la AMB y la ANB, los semiplanos que las contienen y que parten del diámetro común AB son caras de un diedro convexo y otro cóncavo; los infinitos semiplanos que forman, por ejemplo, el diedro convexo, cortan a la superficie esférica en semicircunferencias máximas que pasan por A y B, y por algún punto del arco MN; estas infinitas semicircunferencias forman una figura que se llama ángulo esférico convexo de lados AMB y ANB.

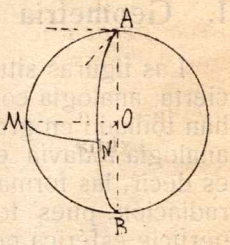


Fig. 1.ª

Como se ve, el ángulo esférico se considera como una figura forzada por semicircunferencias máximas. Pero los puntos de todas esas semicircunferencias forman una figura, que si se considera como porción de la superficie esférica, se denomina *huso esférico;* el cual según vemos, viene a ser una región angular esférica. La porción de esfera limitada por un huso esférico y los semicírculos correspondientes se llama *cuña esférica.* Y así, en la figura 1.ª, las semicircunferencias máximas que pasan por A y por los puntos del arco MN, hemos dicho que forman un ángulo esférico; la porción de superficie esférica ocupada por estas semicircunferencias máximas, forma un huso esférico; y la porción de esfera limitada por este huso esférico, y los semicírculos ABM y ABN, es una cuña esférica.

Razonando como para los diedros se justifica esta definición: *Llámase amplitud de un ángulo esférico, la del diedro formado por los semicírculos correspondientes a sus lados.* Y así en la figura 1.ª, la amplitud del ángulo esférico MAN es la del diedro MABN, o lo que es igual, la de su sección normal MON, o la de su arco MN, o todavía, la del ángulo formado por las tangentes a las semicircunferencias lados, trazadas por A.

Circunferencias máximas perpendiculares y oblícuas.

Cuando los planos de dos circunferencias máximas son

perpendiculares, ellas también se llaman perpendiculares, y los ángulos que forman son rectos. Cuando no, se llaman oblícuas.

Recordando que los polos de una circunferencia máxima (o menor) son los extremos del diámetro perpendicular a su plano, resulta que *para que dos circunferencias máximas sean perpendiculares, es condición necesaria y suficiente que cada una de ellas pase por los polos de la otra.* Y así, en la figura anterior, si A y B son los polos de la circunferencia máxima que pasa por M y N, todas las circunferencias máximas que pasan por A y B son perpendiculares a la MN, puesto que sus planos pasarán por el diámetro AB, que es perpendicular al plano de la MN; y recíprocamente, las circunferencias máximas perpendiculares a la MN tienen sus planos perpendiculares al de ésta, y como esos planos pasan por el centro, contendrán al diámetro AB y pasarán por los polos de MN, o sea por A y B.

En resumen:

Las figuras situadas sobre una misma superficie esférica tienen propiedades que guardan cierta analogía con las figuras situadas sobre un plano, y todavía más analogía con las figuras radiadas; a las rectas de un plano corresponden las circunferencias máximas, que quedan determinadas por dos puntos que no están en un mismo diámetro.

A la distancia rectilínea en el plano corresponde la distancia esférica, que es la longitud del arco de círculo máximo que une dos puntos de una superficie esférica. A los ángulos planos corresponden los ángulos esféricos, determinados por dos arcos de círculo máximo que se cortan, llamándose amplitud de esos ángulos esféricos a la amplitud del ángulo diedro formado por los planos de dichos arcos.

A las rectas perpendiculares y oblicuas corresponden las circunferencias máximas perpendiculares y oblicuas, siendo condición necesaria y suficiente para que estas circunferencias máximas sean perpendiculares que cada una de ellas pase por los polos de la otra.

2. Triángulos esféricos.

Tres semirectas de una radiación, que no estén en un plano, son aristas de un triedro. Tres puntos de una superficie esférica que no estén en una circunferencia máxima, son vertices de un *triángulo esférico*. Supongamos por ejemplo, los tres puntos A, B y C de la superficie esférica dibujada en la figura 2.ª, y supongamos que no están en una misma circunferencia máxima, para lo cual es necesario que el plano ABC no pase por el centro O. Los tres rayos OA, OB y OC no estarán en un plano, y determinarán un triedro, formado por los infinitos rayos que parten de O y pasan por los puntos del triángulo plano ABC. Estos rayos que integran el triedro cortan a la superficie esférica en puntos de una figura que se llama *triángulo esférico ABC*. Las caras del triedro determinan tres arcos de circunferencia máxima AB, AC y BC, que se llaman los *lados* del triángulo esférico; y los tres diedros del triedro determinan tres *ángulos esféricos,* que se llaman *ángulos del triángulo esférico,* llamándose a los puntos A, B y C *vértices* de esos ángulos, o vértices del triángulo.

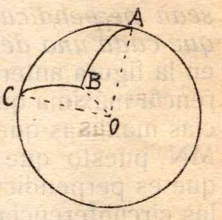


Fig. 2.ª

En resumen:

Triángulo esférico es la intersección de una superficie esférica con un triedro cuyo vértice es el centro de la esfera. A las aristas, caras y diedros del triedro corresponden los vértices, lados y ángulos esféricos del triángulo esférico.

3. Polígonos esféricos.

Todo ángulo poliedro, cuyo vértice esté en el centro de una superficie esférica, determina en esa superficie una figura, llamada *polígono esférico,* siendo sus puntos las intersecciones de la superficie con los rayos que integran el ángulo poliédrico. A las caras del ángulo poliédrico corresponden lados del polígono esférico; y a los diedros del ángulo poliédrico corresponden ángulos esféricos del polígono; como hemos explicado para el triángulo esférico.

Se deduce de la definición que las propiedades de los polígonos esféricos son consecuencia inmediata de las propiedades de los ángulos poliédricos.

En resumen:

Se llama polígono esférico la intersección de una superficie esférica con un ángulo poliédrico cuyo vértice es el centro de la esfera.

4. Angulo sólido.

Si en la superficie esférica se traza una línea cerrada, quedará esa superficie dividida en dos recintos. Las infinitas semirectas que parten del centro y pasan por cada uno de los puntos de uno cualquiera de estos recintos forman una figura llamada *ángulo sólido*.

Si un ángulo sólido se corta por superficies esféricas de distintos radios, cuyo centro común sea el vértice de dicho ángulo sólido, las secciones producidas en esas superficies esféricas son figuras semejantes, cuyas áreas son proporcionales a los cuadrados de sus radios. Por tanto, hay una razón constante entre el área de cada una de esas secciones y el cuadrado del radio. A esa razón constante se le llama *amplitud del ángulo sólido*.

En particular, todas las semirectas que parten del centro de una esfera forman una radiación de semirectas que se considera también como un ángulo sólido.

Calcula su amplitud: $\frac{\text{Area de la esfera}}{\text{Radio al cuadrado}} = \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi.$

Por tanto la amplitud del ángulo sólido formado por dicha radiación es igual a 4π.

En resumen:

Se llama recinto de una superficie esférica a una porción de ésta, limitada por una curva esférica simple y cerrada.

Se llama ángulo sólido una porción de radiación de semirectas determinada por un recinto en toda superficie esférica cuyo centro está en el vértice.

Se llama amplitud de un ángulo sólido al cociente de dividir el área de un recinto esférico correspondiente, por el cuadrado de su radio.

4. Construcciones en la esfera.

En la esfera se pueden efectuar construcciones análogas

a las que se efectúan en el plano, pero utilizando un compás de ramas curvas, con objeto de que se puedan apoyar sus dos extremidades sobre la superficie esférica. Con este *compás esférico* se pueden trazar circunferencias máximas, o circunferencias menores, haciendo centro en un polo que no esté más alejado que el otro de la circunferencia que se traza. Pues se puede ver inmediatamente que el polo equidista esféricamente de los puntos de la circunferencia, ya que las distancias esféricas son arcos de iguales cuerdas.

Más importante que las construcciones sobre la misma superficie esférica, es la construcción *en un plano,* de los elementos de una figura esférica, por ejemplo, de los elementos desconocidos de un triángulo esférico, cuando se dan otros suficientes para determinarlo.

En tal caso podremos recurrir a las construcciones indicadas para los triedros. Pero tanto para construcciones sobre la superficie esférica, como para estas construcciones en un plano, debe resolverse préviamente este problema:

Dada una superficie esférica, hallar su radio gráficamente.

Toma para ello dos puntos A y B en la superficie esférica (figura 3.ª), que no sean opuestos. Haciendo centro en los dos puntos, y con el mismo radio, traza dos arcos sobre la superficie esférica, que se corten en un punto M. Halla de la misma manera otros dos puntos N y P; y podemos asegurar que los tres están en una misma circunferencia máxima, la perpendicular al arco AB en su punto medio. Pues, por ejemplo, el triángulo esférico ABM es isósceles, y la bisectriz del ángulo en M es mediatriz del arco AB.

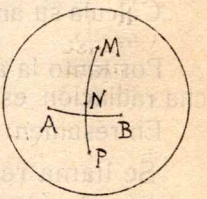


Fig. 3.ª

Es decir, que el triángulo rectilíneo MNP tiene como circunferencia circunscrita la circunferencia máxima. Pero este triángulo rectilíneo lo podemos construir en el plano, porque se pueden tomar con el compás esférico sus tres lados; luego trazando su circunferencia circunscrita, el radio de ésta será el de la esfera.

Con esto, para trazar, por ejemplo, la circunferencia máxima que pasa por A y B en la esfera, se toma un cuadrante en el plano, y con su cuerda como radio, se hace centro en A y B, y se trazan arcos, que se cortarán en los polos del arco pedido.

En resumen:

Sobre la esfera se pueden efectuar construcciones análogas a las efectuadas sobre un plano, empleando para ello un compás de ramas curvas, llamado compás esférico.

Para estas construcciones interesa poder hallar gráficamente el radio de una esfera, para lo cual se toman dos puntos en ella, se considera el círculo máximo que es mediatriz del arco que los une, y se toman tres puntos en esa mediatriz, que determinarán un triángulo; éste se puede construir en un plano, siendo el radio de su circunferencia circunscrita igual al radio de la esfera.

Ejercicios

1. En una superficie esférica de 2 cm. de radio se toman dos puntos A y B, tales que al ser unidos con el centro de la esfera determinan un ángulo de 60°. Calcular la longitud de la distancia esférica que une dichos dos puntos.
2. Calcular la distancia rectilínea que hay entre los mismos puntos A y B del problema anterior.
3. Si se traza un radio perpendicular al plano determinado por el centro de la esfera y dichos puntos A y B, ese radio tendrá por extremo un punto P de la superficie esférica. Díganse las amplitudes de los lados y de los ángulos del triángulo esférico PAB.
4. Cuando las aristas de un triedro son perpendiculares dos a dos, el triedro se llama trirrectángulo. Calcular la amplitud de ese triedro, considerado como ángulo sólido.

TEMA 15.°

Volúmenes de prismas

1. Equivalencia de poliedros.

Igualdad de poliedros.

Aplicando la definición general de igualdad a los poliedros, diremos que dos poliedros son iguales cuando se pueden hacer corresponder punto a punto de manera que cada

uno de los segmentos que unen puntos del primer poliedro son superponibles con los segmentos que unen puntos análogos del segundo.

Poliedros equivalentes

Ya sabes que un paralelógramo es equivalente a un rectángulo que tenga la misma base y la misma altura, porque el paralelógramo se puede transformar en dicho rectángulo, quitándole uno o más triángulos y agregándole de distinta manera los mismos triángulos que se le han quitado.

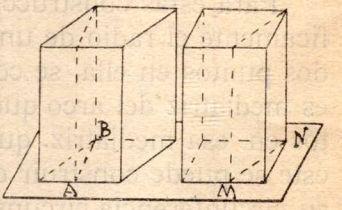


Fig. 1.ª

O dicho de otro modo: el paralelógramo y rectángulo se pueden descomponer en partes que sean respectivamente iguales.

Si a un poliedro se le quitan una o varias partes y se le agregan otras partes iguales a las que se le han quitado, se dice que ese poliedro se transforma en otro *equivalente.*

O dicho de otra manera: si dos poliedros se pueden descomponer en partes respectivamente iguales, se dice que son equivalentes.

Por ejemplo, suponte que los poliedros dibujados en la figura primera, sean prismas de igual altura y base equivalente, es decir, éstas descomponibles en partes respectivamente iguales; los poliedros serán entonces equivalentes, pues descomponiendo las bases en dichas partes respectivamente iguales y trazando planos perpendiculares a las bases, por las rectas AB y MN que han servido para la descomposición de esas bases, resultarán los poliedros descompuestos en partes respectivamente iguales, ya que las dos partes en que se ha descompuesto el primero son prismas que tienen igual base e igual altura que los prismas en que se ha descompuesto el segundo, y serán respectivamente iguales a éstos.

Observación sobre la equivalencia de poliedros.

Entre la equivalencia de polígonos y la de poliedros existe una diferencia esencial. Dados dos polígonos se verifica necesariamente una de estas dos cosas: o que son equivalentes, es decir, descomponibles en partes respectivamente iguales, o que alguno de ellos es equivalente a una parte del otro.

Pues transformándolos en rectángulos de la misma base, que sean respectivamente equivalentes a los polígonos, esos rectángulos resultarán, o de igual altura, y por tanto equivalentes, o de distinta altura, y el de menor altura será equivalente a una parte del otro.

En cambio, con los poliedros no ocurre así. Se ha demostrado que un cubo y un octaedro regular, por ejemplo, no pueden ser nunca equivalentes, en el sentido de poderse descomponer en partes respectivamente iguales; por lo cual, si se toman un cubo y un octaedro regular a los cuales se les deba atribuir el mismo volumen, en la forma que luego diremos, resultará con esos dos poliedros, que ni son equivalentes, ni es uno de ellos equivalente a una parte del otro.

Hay sin embargo, un género de poliedros, que son los prismas, para los cuales se verifica la propiedad dicha de los polígonos, precisamente por derivarse de éstos. Vamos pues a estudiar en particular la equivalencia de prismas, para llegar por medio de ella al concepto riguroso de volumen.

En resumen:

Si a un poliedro se le quitan una o mas partes y se le agregan partes iguales a las que se le han quitado, se transforma en otro poliedro que se llama equivalente al primero.

2. Equivalencia de prismas.

Caso de prismas rectos.

Dos prismas rectos que tengan bases equivalentes e iguales alturas *son equivalentes*. Lo hemos visto con los prismas de la figura 1.ª, y se comprende que es general: si las bases se pueden descomponer en partes respectivamente iguales, los prismas se podrán descomponer en partes respectivamente iguales, y serán equivalentes.

Caso de prismas oblícuos.

Todo prisma *oblícuo* es equivalente a un *prisma recto* cuya base sea *la sección recta,* y cuya altura sea *la arista lateral* del prisma oblícuo.

Para demostrarlo, suponte primeramente que en el prisma oblícuo se puede trazar una sección recta que corte a todas las aristas laterales como ocurre en la figura 2.ª en la cual la sección recta FGHIJ corta a las aristas laterales del prisma dado. Dibuja otro prisma análogo.

Prolonga una de estas aristas hasta que sea FF'=AA', y todas las demás aristas supónlas prolongadas indefinidamente.

Traza por el punto F' un plano paralelo a la sección recta dicha, y entonces se formará un prisma recto que tiene por base esa sección recta y por altura el segmento FF', o uno igual a él, igual también a la arista lateral del prisma oblícuo dado. Tal prisma recto y tal prisma oblícuo ya se ve que son equivalentes, pues tienen una parte común, que es el cuerpo comprendido entre la superficie lateral del prisma dado, la sección recta primeramente trazada y la base superior del prisma dado; y las otras dos partes de cada uno de los prismas son evidentemente iguales.

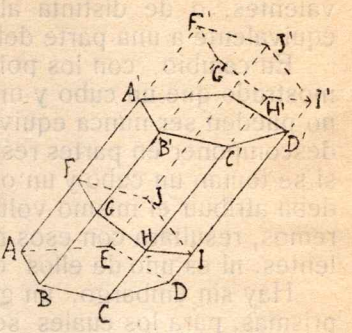


Fig. 2.ª

Si en segundo lugar supones que las aristas laterales del prisma oblícuo están tan inclinadas que no hay sección recta que corte a todas las aristas laterales, razonaríamos en forma análoga a como se hace para demostrar la equivalencia de paralelógramos de igual base e igual altura; con lo cual resulta también demostrado el teorema.

En resumen:

Si dos prismas rectos tienen bases equivalentes e igual altura son equivalentes.

Todo prisma oblicuo es equivalente al prisma recto que tenga por base su sección recta y por altura su arista lateral.

3. El concepto de volumen.

La equivalencia de polígonos te permitía definir el área de un polígono como la magnitud común a ese polígono y a todos sus equivalentes. De igual manera la equivalencia de prismas te permitirá definir el *volumen* como magnitud común a un prisma y todos sus equivalentes.

Por un razonamiento que no detallamos, se demuestra análogamente que para las áreas, que los volúmenes son también magnitudes que se pueden *medir,* y hay costumbre de tomar como unidad de medida el volumen de un cubo que tenga por arista un segmento cuya longitud sea la que se toma por unidad de longitud; y así, si se toma por unidad de longitud el metro, se tomará por unidad de volumen

el metro cúbico, que es el volumen de un cubo cuya arista es un metro lineal.

Hay costumbre en la práctica de distinguir el volumen de un sólido, del volumen interior de una vasija, al cual se le llama *capacidad,* aunque no es magnitud distinta que el volumen. Se suele tomar como unidad de capacidad el *litro,* que es muy aproximadamente igual al decímetro cúbico, y que se define exactamente como el volumen ocupado por un kilogramo de agua; es decir, por una masa de agua igual a la masa del kilogramo tipo, que se conserva en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas.

En resumen:

Llamaremos volumen a la magnitud común a un prisma y a todos sus equivalentes.

4. Volumen de un paralelepípedo rectángulo.

Así como el área de un rectángulo es igual al producto de sus dos dimensiones, *el volumen de un rectoedro o paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones.* Llamando esas dimensiones *a, b* y *c* y llamando V al volumen, expresa el valor de éste:

$$V=a.b.c$$

Por ejemplo, suponiendo que las tres aristas que concurren en un vértice de un rectoedro tienen por longitudes:

$$a=3 \text{ cm.}; \quad b=4 \text{ cm.}; \quad c=5 \text{ cm.}$$

halla su volumen:

$$V=3 \text{ cm.} \times 4 \text{ cm.} \times 5 \text{ cm.} = (3 \times 4 \times 5) \text{ cm.}^3 = 60 \text{ cm.}^3$$

En efecto, en este caso particular se puede suponer que las tres dimensiones se dividen en centímetros, y que se trazan planos perpendiculares a las aristas por sus puntos de división. Queda entonces descompuesto el rectoedro en cm.^3, y contándolos se ve fácilmente que hay $3 \times 4 \times 5 \text{ cm.}^3$

Para demostrar el teorema *en general,* se puede observar que variando una sola dimensión del rectoedro, su volumen varía proporcionalmente a esa dimensión, pues al crecer ésta, crece el volumen, y al multiplicar esas dimensiones por un entero, el volumen queda multiplicado por ese entero, lo cual basta para deducir que el volumen del rectoedro es proporcional a cada una de las tres dimensiones, cuando solo una varía.

Razonando entonces por regla de tres, podremos suponer primero un cubo cuya arista sea la unidad de longitud, por ejemplo un centí-

metro, y el volumen del cubo será una unidad de volumen; en ese ejemplo, 1 cm.^{3} Si ahora se hace la largura de *a* cm., el volumen se hará de *a* cm.^{3} Si luego se hace la anchura de *b* cm., el volumen se hará de a.b cm.^{3} En fin, si luego se hace la altura de *c* cm., el volumen se hará de a.b.c cm.^{3}

En resumen:

El volumen de un paralelepípedo rectángulo o rectoedro es igual al producto de sus tres dimensiones.

5. Volumen de un prisma cualquiera.

Prisma recto.

El rectoedro es un prisma recto, y para hallar su volumen basta multiplicar primero las dos dimensiones de la base, con lo cual se tiene el área de esta base, y el resultado se multiplica por la altura, y por tanto el volumen de ese prisma será igual *al producto del área de la base por la altura*.

Si se trata de otro prisma recto de base cualquiera, también su volumen es igual al producto de la base por la altura, porque la base se puede transformar en un rectángulo equivalente, y el rectoedro que tenga por base ese rectángulo y por altura la misma del prisma, será equivalente a éste, y por tanto, el volumen común a los dos será el producto del área de la base, que también es la misma para los dos, por la altura.

Prisma oblícuo.

Antes has visto que el prisma oblícuo era equivalente al prisma recto que tenía por base la sección recta y por altura la arista lateral. Por consiguiente, *el volumen de un prisma oblícuo será igual a su sección recta por la arista lateral.*

Pero se puede calcular también el volumen de un prisma oblícuo, *multiplicando el área de su base por su altura,* y esto se puede razonar intuitivamente considerando otro prisma recto que tenga igual base e igual altura que el prisma oblícuo, y suponiendo que se descomponen en hojas equivalentes, por planos paralelos a las bases.

También puede demostrarse rigurosamente procediendo de análoga forma a como se hizo con la fórmula del área del paralelogramo, aunque no detallamos la demostración, por brevedad.

Ejercicios

1. Calcúlese los hectólitros de vino que caben en un lagar que tiene la forma de un rectoedro, cuyas dimensiones son 3 m., 3,50 m , y 4 m.
2. Se quiere construir un prisma recto de base cuadrada, cuyo volumen sea de 1 m^3, y que tenga por altura 50 cm. Calcular la arista básica.
3. Un prisma triangular regular tiene de arista básica 5 cm. y de arista lateral 7 cm.; está hecho de una madera cuya densidad es 0,9. Calcular su peso.
4. Un prisma oblícuo tiene por base un exágono regular, cuya arista básica es de 2 cm. Tiene de altura 8 cm., y tiene de arista lateral 10 cm. Calcular el área de la sección recta.

TEMA 16.º

Volúmenes de pirámides

1. Volumen de un cuerpo cualquiera.

En la lección anterior hemos definido el volumen como la magnitud común a un prisma y todos sus equivalentes. Para definir en general el volumen de un cuerpo cualquiera, admitiremos como axioma que hay un prisma cuyo volumen es mayor que el volumen de todos los cuerpos prismáticos contenidos en el cuerpo dado, y menor que todos los cuerpos prismáticos que contienen en su interior el cuerpo dado. Entonces el volumen de ese prisma es lo que llamaremos volumen del cuerpo.

Los cuerpos prismáticos contenidos en el cuerpo dado estarán formados por unc o varios prismas que entre todos componen *una parte* del cuerpo; y al contrario, los cuerpos prismáticos que contienen al cuerpo dado serán cuerpos formados por uno o varios prismas tales, que el cuerpo dado es una parte del primero.

En resumen:

Llamaremos volumen de un cuerpo al volumen de un prisma que es mayor que todos los cuerpos prismáticos contenidos en el cuerpo dado, y menor que todos los cuerpos prismáticos que contienen al cuerpo dado.

2. Tetraedros de bases equivalentes e igual altura.

Suponte que dos tetraedros tienen bases equivalentes, es decir, que tienen por base dos triángulos de igual área, y suponte también que las alturas de los dos tetraedros son iguales. Entonces se demuestra que *los dos tetraedros tienen el mismo volumen,* lo cual se suele expresar diciendo que esos tetraedros son *equivalentes,* bien entendido que esta palabra significa *equivalentes en volumen,* pero no equivalentes en el sentido de que puedan descomponerse en partes respectivamente iguales.

Se puede razonar *intuitivamente* que dichos dos tetraedros tienen igual volumen, dividiendo sus respectivas alturas en gran número de partes y trazando por los puntos de división planos paralelos a las bases. Con ello quedarán los tetraedros descompuestos en el mismo número de *hojas,* que tienen el mismo espesor en ambos tetraedros, y que tienen la misma superficie, por lo cual pueden considerarse las hojas correspondientes a ambos tetraedros como del mismo volumen, y las sumas de todas las hojas, es decir, los dos tetraedros, tendrían el mismo volumen. La demostración rigurosa se indica en la figura 1.ª, si bien no la detallamos, por razones de brevedad.

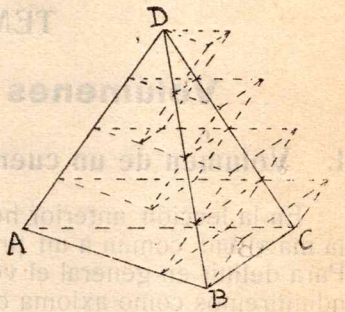


Fig. 1.ª

En resumen:

Si dos tetraedros tienen bases equivalentes y alturas iguales tendrán el mismo volúmen.

3. Volumen de un tetraedro.

Así como el área del triángulo, es igual a la mitad de la base por la altura, el volumen de un tetraedro es *igual a la tercera parte del área de su base por la respectiva altura.*

En efecto, dibuja un tetraedro ABCD (figura 2.ª); construye un prisma que tenga por base una del tetraedro, tal como ABC, y por altura la altura respectiva, o sea la per-

pendicular desde el vértice D a esa base. Para construir tal prisma basta trazar por D un plano paralelo a la base ABC, y por A y C rectas paralelas a la arista BD, las cuales cortarán a ese plano en los puntos E y F, que son el quinto y sexto vértice del prisma, siendo los otros vértices los del tetraedro. Dos de las caras laterales del prisma están descompuestas en partes iguales por las rectas AD y CD; divide también la tercera cara lateral, trazando la diagonal EC, que determinará con el vértice D un plano. Tal plano y el ADC, dividen al prisma en tres tetraedros, que son de igual volumen. El uno es el tetraedro dado, que tiene por base ABC y por altura la distancia de ella al vértice D, opuesto a esa base. El otro es el que tiene por base la otra base del prisma, o sea DEF, y por vértice opuesto al C, evidentemente de igual volumen que el anterior. Y el tercer tetraedro es el que tiene por base el triángulo ACE, y por vértice opuesto el punto D, tetraedro que es de igual volumen que el segundo, porque se puede éste considerar que tiene por base el triángulo ECF, igual al ACE, y por vértice opuesto el D.

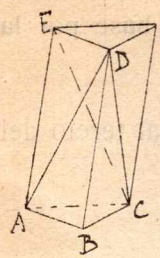


Fig. 2.ª

Queda pues demostrado que el prisma es el tiple, en volumen, del tetraedro dado ABCD, y éste será la tercera parte del prisma; y como éste tiene por volumen el área de la base ABC, por la altura o distancia de ella a D, queda demostrado que el tetraedro tiene por volumen la tercera parte del área de una base por la respectiva altura:

En resumen:

El volumen de un tetraedro es igual a la tercera parte del área de su base por la respectiva altura:

$$T = \frac{1}{3} B \cdot a$$

4. Volumen de una pirámide.

La base de la pirámide es un polígono, que se podrá descomponer en triángulos; luego la pirámide se podrá descomponer en tetraedros, que tengan por base esos triángulos, y por vértice opuesto el de la misma pirámide, siendo, por tanto, igual a la altura de todos estos tetraedros. Para sumar sus volúmenes, se podrá sacar factor común a esa

altura, y al coeficiente $\frac{1}{3}$, y resultará que el volumen de la pirámide es igual a un tercio del área de la base por la altura.

En resumen:

El volumen de una pirámide es igual al tercio del área de la base por la altura.

5. Volumen del tronco de pirámide.

Tronco de pirámide triangular.

Dibuja un tronco de pirámide triangular (figura 3.ª), es decir, la porción de tetraedro comprendida entre la base y un plano paralelo a ella, trazado entre el vértice y esa base.

Para hallar su volumen, efectúa una descomposición análoga a la descomposición del prisma de la figura anterior, o sea de la figura 2.ª Es decir, traza el plano que pasa por el vértice D y por la arista AC, y otro que pasa por el vértice D y por la recta EC, diagonal de la cara ACFE. Con esto ha quedado descompuesto el tronco de pirámide en tres tetraedros: uno el ABCD, que le llamaremos T_1, y que tiene por base la base mayor del tronco, a la cual llamaremos B, y por altura la del tronco, a la cual llamaremos *a;* otro tetraedro es el EFDC, que tiene por base la base menor del tronco, a la cual llamaremos *b,* y por altura la misma *a;* tetraedro que llamaremos T_2; y por fin, el tercer tetraedro es el ACED, que llamaremos T_3.

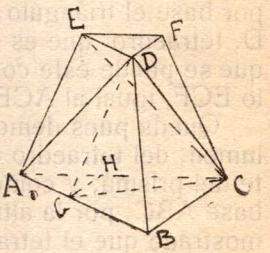


Fig. 3.ª

Los volúmenes de los T_1 y T_2 son como sabes

$$T_1=\frac{1}{3}\,B.a; \qquad T_2=\frac{1}{3}\,b.a$$

Para expresar el volumen del T_3, traslademos su vértice D, a la base opuesta, de modo que el volumen no varíe; es decir, tracemos por D una paralela a la recta AE, o sea a la cara AEC, y que cortará a la arista AB en un punto que llamaremos G. Puedes observar entonces que el tetraedro que tiene por vértice G y por base opuesta la misma que la de T_3, o sea ACE, tiene el mismo volumen que el T_3, puesto que tiene la misma base que él e igual altura.

Mas para hallar este volumen, que le llamaremos simplemente T_3,

nos conviene tomar como base del tetraedro nuevo el triángulo AGC, y como vértice opuesto el E. Con esto resulta que el segundo tetraedro de volumen T_3 tiene por altura *a*, y una base fácil de calcular en función de las bases *B* y *b*. Observaremos para *ello* que la B es ABC y la *b* es igual a la AGH, siempre que GH sea paralela a BC, y por tanto a DF; con lo cual se ve que los tres triángulos de B, que para mayor claridad los dibujamos de nuevo en la figura 4.ª, y cuyas áreas las llamamos *b,B,x*, son tales que el *b* y el *x* tienen igual altura, que es la distancia desde G hasta AC, por lo cual sus áreas serán proporcionales a las bases:

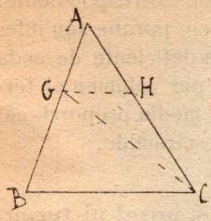


Fig. 4.ª

$$\frac{b}{x}=\frac{AH}{AC}$$

y los B y *x* tienen también igual altura, que es la distancia desde C hasta AB y también será:

$$\frac{x}{B}=\frac{AG}{AB}$$

pero como son iguales las últimas razones, lo serán las dos primeras, es decir, $\frac{b}{x}=\frac{x}{B}$ o sea:

$$x^2=b.B;\quad x=\sqrt{B.b}$$

Vemos por tanto que el área *x* del triángulo AGC es *media proporcional* entre las bases del tronco y será:

$$T_3=\frac{1}{3}a.\sqrt{B.b}$$

El volumen T, del tronco de pirámide será:

$$T=T_1+T_2+T_3=\frac{1}{3}a.(B+b+\sqrt{B.b})$$

que se enuncia diciendo: *el volumen del tronco de pirámide triangular es igual a un tercio de su altura por la suma de las bases más una media proporcional entre ellas.*

Tronco de pirámide cualquiera.

Sirve la misma fórmula y regla.

Para demostrarlo se considera el tronco de pirámide como diferencia entre la pirámide total y la deficiente. Pero puedes construir una pirámide triangular que tenga igual volumen que esa pirámide total, sin más que transformar la base en un triángulo equivalente, y tomar igual altura. En esta pirámide triangular podremos trazar un

plano que forme un tronco, de igual altura que el dado, y como las bases mayores de ambos troncos son equivalentes, lo serán las menores, ya que hay proporcionalidad entre las bases de un tronco y los cuadrados de sus distancias al vértice de la pirámide correspondiente. Resultan entonces los dos troncos de igual volumen, porque son diferencias de pirámides de igual volumen, la total y la deficiente de cada uno; y como el tronco de pirámide triangular tiene por volumen el tercio de la altura por la suma de las bases más una media proporcional entre ellas, lo mismo ocurrirá con el otro tronco de pirámide.

En resumen:

El volumen del tronco de pirámide es igual al tercio de su altura por la suma de las bases más una media proporcional entre ellas.

Ejercicios

1. Calcular el volumen de un octaedro regular de 3 cm. de arista, recordando que está formado por dos pirámides cuadrangulares, regulares e iguales.
2. Si en la pirámide cuadrangular considerada en el problema anterior se traza un plano paralelo a la base, por el punto medio de la altura, se forma un tronco, comprendido entre dicho plano y la base de la pirámide. Calcúlese el volumen de ese tronco, aplicando la fórmula correspondiente.
3. Calcúlese el volumen del mismo tronco de pirámide considerado en el problema anterior, restando del volumen de la pirámide total el de la pirámide deficiente.
4. Escríbase la fórmula general que da el volumen de un tronco en función de las áreas B y b, de sus dos bases, y de las alturas A y a de las pirámides total y deficiente.

TEMA 17.º

Volúmenes de cuerpos curvos

1. Volumen del cilindro.

Para hallar el volumen de un cilindro se sigue la misma regla que para hallar el volumen del prisma, es decir, *se multiplica el área de la base por la altura*. Llamando C el volumen de un cilindro de revolución, llamando *r* el radio

básico, llamando *a* la altura, y llamando *B* el área de la base, escribe cual será el volumen del cilindro:

$$C = B \cdot a = \pi r^2 \cdot a$$

En efecto, si en las bases inscribimos un polígono regular de *n* lados, cuya área llamaremos s_n y circunscribimos otro de área S_n, podremos tomar esos polígonos como bases de prismas rectos, que tengan la misma altura que el cilindro. Uno de los prismas estará inscrito en el cilindro, y a su volumen le llamaremos p_n, y el otro estará circunscrito al cilindro y a su volumen le llamaremos P_n. Entonces se verificará $p_n < C < P_n$, y como el volumen del prisma es igual al producto del área de la base por la altura, será $s_n \cdot a < C < S_n \cdot a$.

El primer miembro y el último tienen el mismo límite, pues la diferencia $S_n \cdot a - s_n \cdot a = (S_n - s_n) \cdot a$, acaba por ser tan pequeña como se quiera, y ese límite será el volumen del cilindro, luego:

$$C = \lim. p_n = \lim. P_n = \lim. (a \cdot s_n) = a \cdot \lim. s_n = a \cdot \pi r^2$$

El caso de ser un cilindro cualquiera se razona lo mismo, si bien los prismas inscriptos y circunscriptos pueden ser rectos u oblícuos y pueden ser regulares o irregulares.

En resumen:

El volumen de un cilindro es igual al producto del área de la base por la altura.

2. Volumen del cono.

Para hallar el volumen del cono se sigue una regla análoga a la que estudiábamos para hallar el volumen de la pirámide, es decir, *se multiplica el área de la base por un tercio de la altura.* Según eso, llamando B, el área de la base de un cono, *a,* la altura, y si es de revolución, llamando *r* el radio básico, escribe el volumen *c* de dicho cuerpo.

$$c = \frac{1}{3} B \cdot a = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot a$$

Esta regla se demuestra en forma análoga a como hemos dicho para el cilindro, pero considerando *pirámides* inscritas y circunscriptas, en lugar de prismas.

En resumen:

El volumen de un cono es igual a un tercio del área de la base por la altura.

3. Volumen del tronco de cono.

Para hallar el volumen de un tronco de cono se sigue también una regla análoga a la que se sigue para hallar el

volumen del tronco de pirámide. Por lo tanto, ese volumen será igual a *un tercio de la altura por la suma de las bases, más una media proporcional entre ellas.* Según eso, llamando B y *b* las bases del tronco de cono, llamando *a* a la altura y llamando T al volumen, escribe el valor de T:

$$T=\frac{1}{3}a.\ (B+b+\sqrt{B.\ b})$$

Esta fórmula se demuestra análogamente a como se ha hecho para el volumen del cilindro *y* del cono, pero considerando *troncos de pirámide* inscriptos y circunscriptos, en lugar de prismas o pirámides.

Si el tronco de cono es de *revolución,* llamando R y *r,* a los radios de sus bases, expresa el volumen T en función de estos radios y de la altura *a:*

$$T=\frac{1}{3}a\ (\pi R^2+\pi r^2+\sqrt{\pi.R.^2\pi r^2})=\frac{\pi}{3}a.(R^2+r^2+R.r)$$

En resumen:

El volumen de un tronco de cono es igual a un tercio de la altura, por la suma de las bases más una media proporcional entre ellas.

4. Volumen de la esfera.

Dibuja una esfera de centro O y radio *r* como en la figura primera. Construye un cilindro circunscripto a ella, el cual tendrá su altura igual a 2r y el diámetro básico igual a esa altura. Construye también un cono cuya superficie lateral tenga dos hojas, de manera que el vértice esté en el centro de la esfera, y las bases sean las mismas bases del cilindro construído.

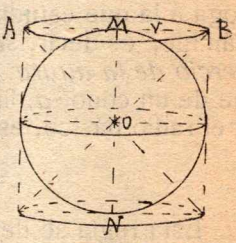


Fig. 1.ª

Se verifica entonces que el volumen del cilindro es igual a la suma de los volúmenes de la esfera y el cono; C = e + c, como en seguida demostraremos; y como el cono es la tercera parte que el cilindro, porque cada cono simple es la tercera parte que medio cilindro, $c=\frac{1}{3}$ C, resultará que la esfera es doble que el cono, o sea, los dos tercios del cilindro; exprésalo:

$$e=C-c=C-\frac{1}{3}\ C=\frac{2}{3}\ C=2\ c$$

Y siendo el volumen de tal cilindro $C=\pi r^2.2r=2\pi r^3$, el de la esfera será:

$$e=\frac{2}{3}.2\pi r^3=\frac{4}{3}\pi r^3$$

Se puede llegar a la misma fórmula por *razonamiento intuitivo* considerando a la esfera compuesta de infinitas pirámides, que tienen su vértice en el centro de la esfera, cuya altura es el radio de la misma, y cuyas bases son porciones infinitesimales de la superficie esférica.

El volumen de cada pirámide será el tercio de la altura por la base, luego el volumen de la esfera será el tercio del radio por la superficie esférica, es decir:

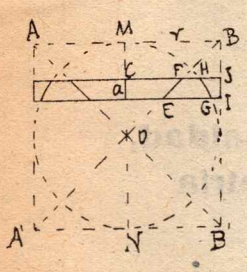


Fig. 2.ª

$$e=\frac{r}{3}.4\pi r^2=\frac{4}{3}\pi r^3$$

La demostración del teorema de los tres cuerpos, o sea la fórmula C = e + c, está indicada en la figura 2.ª, aunque no la detallamos por razones de brevedad.

Sólo advertiremos que esa demostración está fundada en que todo plano paralelo a las bases del cilindro, por un punto tal como el C, determina en ese cilindro una sección circular, cuya área es suma de las áreas de la sección determinada en el cono y en la esfera, lo cual se ve aplicando el teorema de Pitágoras, que da:

$$OH^2 = CH^2 + OC^2$$

Se deduce que $CJ^2 = CH^2 + CF^2$

Y de aquí se deduce que $\pi.CJ^2 = \pi.CH^2 + \pi.CF^2$

Si los tres cuerpos se descomponen en *hojas* por planos paralelos a las bases del cilindro, cada hoja de este cilindro será suma de las correspondientes al cono y la esfera, y al sumar esas hojas se deduce el teorema de los tres cuerpos.

En resumen:

El volumen de una esfera es igual al tercio de la superficie esférica por el radio.

Ejercicios

1. Calcular el volumen de un cono de revolución, cuya base tiene por radio 3 cm., y cuyo lado o generatriz mide 5 cm.

2. Si el cono del problema anterior se corta por un pla-

no paralelo a la base, y que pase por el punto medio de la altura, queda dividido en un tronco de cono y otro cono menor, llamado deficiente. Calcular el volumen de dicho tronco de cono, empleando la fórmula general, y calcular el mismo volumen como diferencia entre el del cono total y el del cono deficiente.

3. Calcular aproximadamente el volumen de la Tierra, supuesta esférica, aplicando la definición del metro.

4. Calcular el radio de una esfera que tenga de volumen 1 m^3.

TEMA 18.º

Nociones sobre igualdad, semejanza y simetría

1. Transformación de figuras.

Dada una figura *f*, cuyos puntos son A, B, C..., supongamos que del punto A se deduce otro punto A', del punto B, otro punto B', del punto C, el C' y así sucesivamente, de cada punto de *f* se deduce otro punto de otra figura f'. Se dice entonces que la figura *f* se ha transformado en *f'*, y los puntos A, B, C... de la primera figura se llaman respectivamente *homólogos* o *correspondientes* de los puntos A', B' C'..., de la segunda.

En resumen:

Se dice que una figura se transforma en otra cuando de cada uno de los puntos de la primera se deduce cada uno de los puntos de esta otra.

2. Transformaciones por igualdad.

Cuando una figura *f*, se transforma en otra figura *f'*, puede suceder que las distancias entre los puntos de la figura *f*, sean iguales a las distancias entre los puntos homólogos de la *f'*. Escribe las primeras igualdades que lo expresan:

$$AB = A'B';\ AC = A'C';\ BC = B'C'...$$

A esas transformaciones se las llama entonces transfor-

maciones por *igualdad* o por *congruencia,* y las figuras *f* y *f'* se llaman figuras *iguales* o *congruentes.*

Cuando dos figuras iguales pueden coincidir por el movimiento, se dice que son *directamente iguales,* y cuando no pueden coincidir se dice que son *inversamente iguales.*

Un ejemplo de figuras inversamente iguales se tiene en las dos manos de una misma persona.

En resumen:

Se llama transformación por igualdad o congruencia a toda transformación que conserva las distancias.

3. Transformaciones por semejanza.

Cuando una figura *f,* se transforma en otra figura *f'*, puede suceder que *se conserven las razones entre las distancias.*

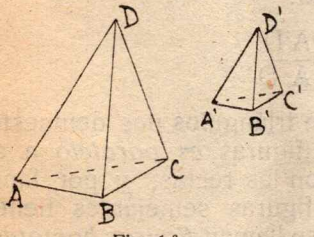


Fig. 1.ª

Escribe las primeras igualdades que lo expresan:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{A\,B'}{A'C'} \qquad \frac{AB}{BC}=\frac{A'\,B'}{B'C'}$$

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A'C'}{B'C'} \ \ldots$$

A estas transformaciones se las llama *transformaciones por semejanza,* y las dos figuras *f* y *f'* se dice entonces que son *semejantes.* Dibuja, por ejemplo, dos tetraedros semejantes como en la figura 1.ª.

En resumen:

Se llama transformación por semejanza, toda transformación que conserva las razones entre las distancias.

4. Transformaciones por homotecia.

Las transformaciones por homotecia son un caso particular de las transformaciones por semejanza. Para que lo comprendas dibuja un tetraedro ABCD como en la figura 2.ª; toma un punto O.

Deduce luego de cada uno de los puntos ABC... del tetraedro dado otro punto A' B' C'... de tal manera que las rectas AA', BB', CC'..., pasen todas por el punto O, y que

las razones de las distancias de O a cada par de puntos homólogos sean iguales. Escribe estas igualdades:

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} \cdots$$

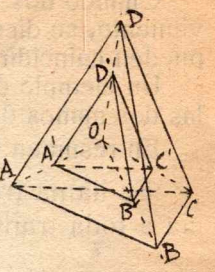


Fig. 2.ª

Estas relaciones deben tomarse no solo en magnitud, sino en signo, es decir, que si los puntos A y A' por ejemplo, están del mismo lado que el O, debe ocurrir lo mismo con los demás pares de puntos correspondientes, y si están a distinto lado, eso debe ocurrir con los demás.

La figura así formada A', B', C'... es semejante a la *f*, pues hay correspondencia biunívoca entre sus puntos, y por otra parte, la semejanza de los triángulos que se forman en la figura nos da:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{A'D'}{AD} \cdots$$

Pero esta misma semejanza de triángulos nos demuestra que todo segmento de una de las figuras *es paralelo* a su homólogo; y lo mismo ocurrirá con las rectas, y por tanto con los planos. Por esto las dos figuras semejantes tienen una posición relativa especial, y se llaman *figuras homotéticas,* con respecto al punto O, llamado *centro de homotecia.* Y según sea la razón $\frac{OA'}{OA}$ positiva o negativa, así se llaman las figuras homotéticas *directas* o *inversas.* Los tetraedros considerados antes son figuras homotéticas *directas.*

En resumen:

Se llama transformación por homotecia a un caso particular de las transformaciones por semejanza, en la cual todas las rectas que unen pares de puntos homólogos, pasan por un mismo punto que se llama centro de homotecia.

5. Relación entre las áreas y volúmenes de dos figuras semejantes.

La razón entre las áreas de dos esferas es igual al cuadrado de la razón entre sus diámetros, o sus radios; y la

razón entre los volúmenes es igual al cubo de esa razón. O bien, las áreas de las esferas son proporcionales a los cuadrados de sus radios y los volúmenes son proporcionales a los cubos de sus radios. Se puede demostrar directamente aplicando las fórmulas que dan el área y el volumen de la esfera; demuéstralo:

$$\frac{S}{S'}=\frac{4\pi R^2}{4\pi R'^2}=\frac{R^2}{R'^2}=\left(\frac{R}{R'}\right)^2;\ \frac{V}{V'}=\frac{4/3.\pi R^3}{4/3.\pi R'^3}=\left(\frac{R}{R'}\right)^3$$

Dibuja ahora dos tetraedros semejantes, que puedes colocarlos en la posición que indica la figura 3.ª. Llama V y V' sus volúmenes, B y B' sus bases y *a* y *a'* sus alturas. Halla las relaciones entre los volúmenes:

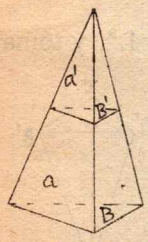


Fig. 3.ª

$$\frac{V}{V'}=\frac{1/3.B\,.a}{1/3.B'.a'}=\frac{B}{B'}\cdot\frac{a}{a'}$$

pero las bases son proporcionales a los cuadrados de las alturas; aplícalo:

$$\frac{V}{V'}=\frac{a^2}{a'^2}\times\frac{a}{a'}=\frac{a^3}{a'^3}=\left(\frac{a}{a'}\right)^3$$

y ves por tanto que también para los tetraedros se verifica que *sus volúmenes son proporcionales a los cubos de dos segmentos homólogos,* como son sus alturas. O dicho de otro modo, que *la razón entre sus volúmenes es igual al cubo de la razón de semejanza.*

Como los *poliedros semejantes* están compuestos por tetraedros semejantes, aplicando la proporción anterior a cada par de tetraedros, y aplicando la propiedad de la suma de antecedentes, como lo hicimos para los polígonos, resultará el teorema aplicable a los poliedros.

Y si se trata de *cuerpos semejantes cualesquiera,* se pueden considerar sus volúmenes como *límites* de volúmenes de poliedros inscritos, según explicamos para los polígonos, luego también se verificará el teorema.

Y por lo que respecta a las *áreas de figuras semejantes,* si esas áreas están formadas por polígonos, se les podrá aplicar el teorema estudiado en la geometría plana, y si son áreas *no planas,* se consideran como límites de áreas planas y también se aplica el teorema.

En resumen:

La razón entre dos áreas homólogas de dos figuras semejantes, es igual al cuadrado de la razón de seme-

janza y la razón entre dos volúmenes es igual al cubo de la razón de semejanza. O dicho de otra manera:

Las áreas homólogas de figuras semejantes, son proporcionales a los cuadrados de los segmentos homólogos; y los volúmenes homólogos de figuras semejantes son proporcionales a los cubos de los segmentos homólogos.

6. Simetría con respecto a un centro.

Dibuja un tetraedro ABCD como en la figura 4.ª, y toma un punto O que llamaremos *centro de simetría*. Busca el punto A', simétrico del A respecto del centro O, que será un punto situado en la recta AO, y que dista del centro O lo mismo que dista el punto A. Halla asímismo los simétricos B', C' y D' de los puntos B, C y D. Dibuja el tetraedro A' B' C' D'. Todos los puntos de este tetraedro son simétricos respecto de los puntos del ABCD, y se llaman *tetraedros simétricos* los dibujados.

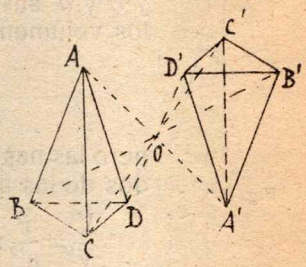


Fig. 5ª

Se ve fácilmente que esos dos tetraedros simétricos son *iguales;* porque, por ejemplo, la distancia AB será igual a la distancia A' B', ya que los triángulos AOB y A' O' B' tienen iguales los ángulos en O y los lados que los forman, y por consiguiente serán iguales.

La igualdad de esos dos tetraedros es por lo demás igualdad *inversa,* porque en general, no pueden coincidir por el movimiento.

En resumen:

Se dice que dos puntos son simétricos respecto de un punto, llamado centro de simetría, cuando están situados en una misma recta que pasa por el centro de simetría, y a igual distancia del mismo.

Y se dice que dos figuras son simétricas respecto de un centro, cuando están formadas por puntos respectivamente simétricos respecto de ese centro.

Las figuras simétricas respecto de un centro son inversamente iguales.

7. Simetría respecto de un eje.

Dibuja un tetraedro ABCD, como en la figura 5.ª y traza el plano que contiene a la cara BCD. Traza luego una recta MN que llamaremos *eje de simetría*, y que podemos suponer perpendicular al plano BCD. Traza por el punto A la perpendicular a esta recta, y toma en dicha perpendicular un punto A', que se llama simétrico del A, respecto del eje, de manera que esté a la misma distancia que el A respecto de este eje. Halla igualmente los simétricos B', C' y D' de los puntos B, C y D respecto del mismo eje MN. Dibuja el tetraedro que tiene por vértices A'B'C'D'. Todos los puntos de este tetraedro son simétricos respecto de cada uno de los puntos del primero y por eso se llaman *tetraedros simétricos*. Los dos tetraedros son figuras *directamente iguales*, y pueden coincidir por un giro de 180°, verificado alrededor del eje MN.

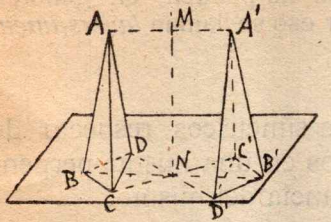


Fig. 5.ª

En resumen:

Se dice que dos puntos son simétricos respecto de un eje, cuando están situados en una misma perpendicular al eje, y a igual distancia del mismo.

Y se dice que dos figuras son simétricas respecto de un eje, cuando están formadas por puntos respectivamente simétricos respecto de ese eje.

Las figuras simétricas respecto de un eje son directamente iguales.

8. Simetría respecto de un plano.

Dibuja un tetraedro ABCD como en la figura 6.ª. Traza un plano. Traza por el punto A la perpendicular a ese plano, y toma en esa perpendicular un punto A' que diste del plano lo mismo que el A. Ese punto A' se dice *simétrico del A respecto de dicho plano*. Busca asimismo los puntos B', C' y D' que son simétricos de los B, C

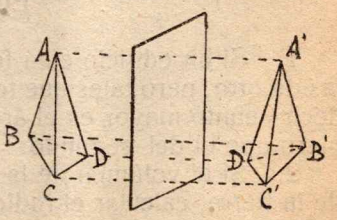


Fig. 6.ª

y D respecto del mismo plano. Traza el tetraedro que tiene por vértices A', B', C' y D'. Este tetraedro y el anterior están formados por puntos respectivamente simétricos y se dice que son *tetraedros simétricos* respecto de dicho plano. Estos tetraedros *son iguales,* si bien no pueden, en general, coincidir por el movimiento y por eso se llaman *inversamente iguales.*

En resumen:

Se dice que dos puntos son simétricos respecto de un plano, cuando están situados en una misma perpendicular al plano y a igual distancia del mismo.

Y se dice que dos figuras son simétricas respecto de un plano, cuando están formadas por puntos respectivamente simétricos respecto de ese plano.

Las figuras simétricas respecto de un plano son inversamente iguales.

9. Centros, ejes y planos de simetría.

Puede suceder que todos los puntos simétricos de los puntos de una figura, ya sea respecto de un centro, de un eje o de un plano, pertenezcan a la misma figura y entonces se dice que las figuras tienen un centro, eje o plano de simetría. Por tanto, si en esas figuras se efectúa la transformación por simetría, según ese centro, eje o plano, las nuevas figuras coinciden con las anteriores.

En resumen:

Se dice que una figura admite un centro, un eje o un plano de simetría cuando al transformarla por esa simetría se deduce otra figura que coincide con la anterior.

Ejercicios

1. Si un edificio está formado por piedras semejantes a las de otro, pero tales que todas sus dimensiones son dobles, decir cuánto mayor es el área, y cuánto el volumen del primero que el del segundo.
2. Si el volumen de la luna es 49 veces menor que el de la tierra, calcular el radio de la luna aplicando la definición del metro.

3. Decir cuántos centros, cuántos ejes y cuántos planos de simetría hay en el cubo.

4. Si se construye la figura homotética de un decímetro cúbico, tomando como centro de homotecia el centro de simetría, y como razón de homotecia del cubo primero al segundo $\frac{1}{2}$, calcular la arista, el área y el volumen del segundo cubo.

Bosquejo histórico de la Geometría elemental

La palabra Geometría significa medida de la Tierra, lo cual indica que la primera finalidad de esta Ciencia fué la medición de superficies sobre el terreno. Por eso, sin duda, el antiguo Egipto puede considerarse como la cuna de la Geometría, pues el deseo de construir canales para fecundar con las aguas del Nilo los terrenos secos, les obligaba a realizar numerosas medidas sobre los campos.

También el pueblo Caldeo realizó progresos en los comienzos de la Geometría, sobre todo buscando su aplicación a la Astronomía, que fué allí muy cultivada.

Sin embargo, el pueblo griego puede decirse que fué el verdadero creador de la Geometría, como Ciencia propiamente dicha, porque fué cultivada con ardor, porque se hicieron numerosísimos descubrimientos, y porque los resultados obtenidos fueron coordinados para formar un verdadero cuerpo de doctrina.

En el siglo VI, antes de J. C., el famoso filósofo *Thales,* nacido en Fenicia, fué a instruirse a Egipto, midió allí la altura de las pirámides por su sombra, fundó en Mileto la escuela jónica, introduciendo en Grecia la Geometría, y enriqueció esta Ciencia con diversos teoremas sobre el ángulo inscrito, los triángulos semejantes, etc.

Más famosos fueron todavía los descubrimientos de *Pitágoras,* que también creó una escuela célebre, siendo el más conocido de esos descubrimientos el teorema sobre el triángulo rectángulo.

Platón, dió tanta importancia a esa Ciencia, como preliminar para el estudio de la Filosofía, que puso en la portada de su escuela: «Que no entre quien no sepa Geometría».

Euclides acertó a sistematizar los conocimientos de su

época en un famosísimo libro, llamado los «Elementos de Geometría», del cual se han hecho más de 1500 ediciones.

A pesar de la perfección lógica de los Elementos, faltaba desarrollar un aspecto, que es de la *Geometría de la medida*, que fué cultivada sobre todo por *Arquímides*.

Citaremos, en fin, entre los geómetras griegos a *Apolonio*, por lo mucho que contribuyó al desarrollo de la teoría de las cónicas.

Cuando la cultura de Grecia declinó, pasaron muchos siglos en los que apenas hacían los geómetras otra cosa que comentar a Euclides, y es preciso llegar a la edad moderna para encontrar geniales innovadores de la Geometría.

Descubierta el Algebra propiamente tal por *Vieta*, que nació en 1540, la aplicó en seguida a la construcción gráfica de las ecuaciones de segundo grado y de tercero, y preparó el camino a *Descartes*, que tuvo la genial concepción de aplicar el Algebra a la teoría de las curvas, por medio de sus famosas *coordenadas*, cambiando verdaderamente de faz a las ciencias matemáticas. Ese método analítico de Descartes es desarrollado desde entonces por un gran número de geómetras.

Esta *Geometría analítica* se encontró poco después de creada, con otro maravilloso método de investigación, que fué el *cálculo infinitesimal*, inventado por *Newton* y por *Leibniz*. Consta de dos ramas, el cálculo *diferencial*, que en Geometría se aplicó, sobre todo, a la determinación de tangentes y de máximos y mínimos; y el cálculo integral, aplicado sobre todo en Geometría a la determinación de longitudes, áreas y volúmenes.

Casi al mismo tiempo, otros geómetras descubrieron otro método fecundo de investigación en Geometría, que en oposición al método analítico se llama *método sintético*, creando así la llamada *Geometría de la posición* o *Geometría proyectiva*, porque estudia principalmente las propiedades de las figuras, que se conservan invariantes en las proyecciones y secciones. Entre los geómetras que más se distinguieron en este aspecto, citaremos a *Pascal*, *Carnot*, *Desargues*, *Poncelet* y *Chasles*.

La representación de figuras del espacio sobre un plano, que siempre se solía hacer de una manera casi empírica, fué estudiada sistematicamente por *Monge*, que de este modo puede considerarse como el fundador de la *Geometría Descriptiva*.

Entre tanto, los comentaristas de Euclides continuaban su obra, intentando principalmente la resolución de algunos

problemas célebres, como el de la *cuadratura del círculo,* y la demostración del famoso *postulado de las paralelas,* conocido con el nombre de Proposición V de Euclides.

Han tenido que pasar muchos siglos, hasta llegar a una época reciente para que se consiguiese demostrar que ese problema de la cuadratura del círculo con el solo auxilio de la regla y el compás, es imposible de resolver; y que ese postulado de las paralelas, es independiente de los postulados anteriores, por lo cual es indemostrable.

No fueron inútiles las tentativas que se hicieron para buscar esa demostración del postulado de las paralelas, pues uno de los caminos que se intentaron fué el de la reducción al absurdo, en lo cual se distinguió primeramente *Lobachefski,* y también *Bolyai,* que partieron del principio, opuesto al de Euclides, de que por un punto exterior a una recta se podían trazar a ella *dos paralelas,* fundando así una *Geometría no euclidiana,* en la cual la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos.

Para demostrar por experiencia el postulado de Euclides, *Gauss* midió la suma de los ángulos de un gran triángulo, y obtuvo, dentro de los errores propios de toda medida física, el valor de 2 rectos. Con esto quedó probado que desde el punto de vista físico, el postulado de Euclides es, por lo menos, muy aproximado, pero ello no puede servir como una demostración matemática exacta.

Puesta ya en entredicho la proposición V de Euclides, es natural que otros geómetras revisaran luego las otras proposiciones que se consideraban siempre como axiomáticas, y así por ejemplo, *Riemann* prescindía del principio de que la recta fuera infinita, y ello le permitía negar también el postulado de Euclides, pero en sentido inverso a como lo habían hecho los dos geómetras que hemos citado, pues él establecía como nueva hipótesis el que por un punto exterior a una recta *no se podía trazar ninguna paralela,* porque las rectas de un plano siempre se encontraban, fundando con ello una nueva *Geometría no Euclidiana,* en la cual la suma de los ángulos de un triángulo es mayor que dos rectos.

En fin, las investigaciones hechas en los últimos tiempos sobre la Geometría elemental, van por ese camino de la revisión de los fundamentos de esta ciencia, tratando de distinguir lo que se admite como axioma y lo que se demuestra realmente, así como aclarar las ideas que se admiten como primitivas, y las que se definen propiamente. Con ello se va perfeccionando el edificio intelectual de la Geometría, que es uno de los más bellos que han construído los hombres.

Tabla de las razones trigonométricas de 0° a 90°

Ang.	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente		Ang	Seno	Coseno	Tangente	Cotangente	
0°	0.0000	1,0000	0,0000	∞	90°	23°	0,3907	0.9205	0,4245	2,3559	67°
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89	24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88	25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65
3	0,0525	0,9986	0,0524	19,0811	87	26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0583	64
4	0,0698	0,9976	0.0699	14,3007	86	27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85	28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84	29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83	30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60
8	0.1392	0,9903	0,1405	7,1154	82	31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81	32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80	33	0,5446	0.8387	0,6494	1,5399	57
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79	34	0,5592	0.8290	0,6745	1,4826	56
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78	35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55
13	0,2250	0,9744	0 2309	4,3315	77	36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76	37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75	38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74	39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51
17	0,2924	0 9563	0,3057	3,2709	73	40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72	41	0,6561	0,7547	0,8693	1.1504	49
19	0.3256	0.9455	0,3443	2,9042	71	42	0,6691	0,7431	0,9004	1.1106	48
20	0,3420	0.9397	0,3640	2,7475	70	43	0,6820	0.7314	0,9325	1.0724	47
21	0.3584	0,9336	0,3839	2,6051	69	44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46
22°	0,3746	0 9272	0 4040	2,4751	68°	45°	0.7071	0,7071	1,0000	1,0000	45°
	Coseno	Seno	Cotangente	Tangente	Ang		Coseno	Seno	Cotangente	Tangente	Ang.

INDICE

	Páginas
Tema 1.°—Preliminares	3
Tema 2.°—Posiciones relativas de rectas y planos	6
Tema 3.°—Rectas y planos perpendiculares	11
Tema 4.°—Angulos diedros	16
Tema 5.°—Proyecciones ortogonales	23
Tema 6.°—Angulos poliédricos	29
Tema 7.°—Superficie prismática y prisma	40
Tema 8.°—Superficie piramidal y pirámide	49
Tema 9.°—Poliedros	56
Tema 10.°—Superficies curvas	70
Tema 11.°—Superficie cilíndrica de revolución	76
Tema 12.°—Superficie cónica de revolución	82
Tema 13.°—Superficie esférica y esfera	90
Tema 14.°—Triángulos y polígonos esféricos	97
Tema 15.°—Volúmenes de prismas	103
Tema 16.°—Volúmenes de pirámides	109
Tema 17.°—Volúmenes de cuerpos curvos	114
Tema 18.°—Nociones sobre igualdad, semejanza y simetría	118
Bosquejo histórico de la Geometría elemental	125
Tabla de las razones trigonométricas de 0° a 90°	128

ES PROPIEDAD DEL AUTOR

Otras obras del mismo autor:

Textos para todos los cursos del Bachillerato

Aprobados por el Ministerio de Educación Nacional

Precio de esta obra: **4 ptas.**